Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 12

Aufgabe 45

1. Es sei R ein Unterring des Ringes S. Geben Sie ein Beispiel für die Situation, in der S und R verschiedene Einselemente besitzen, und in der S, nicht aber R ein Einselement besitzt.
2. Finden Sie einen Ring S mit 1, und Elemente $x, y \in S$ für die $yx = 1 \neq xy$ ist.

Aufgabe 46

Es sei $S := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$(f+g)(x) \ := \ f(x) + g(x) \text{ und } (f \cdot g)(x) \ := \ f(x) \cdot g(x),$$

für $f, g \in S$ und $x \in \mathbb{R}$. S ist ein kommutativer Ring mit 1 (Dies soll <u>nicht</u> gezeigt werden!!!).
Weiter sei $N := \{f \in S \mid f(0) = 0\}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) N ist ein Ideal.

b) N ist ein Primideal.

c) $S/N \cong \mathbb{R}$.

Aufgabe 47

Es sei $(S, +\cdot)$ ein Ring und 0 das neutrale Element von $(S, +)$. Zeigen Sie:

a) Ist S kommutativ, so bildet die Menge aller nilpotenten Elemente von S ein Ideal.

b) Ist S ein Integritätsbereich, so ist 0 das einzige nilpotente Element von S.

<u>Hinweis:</u> Gibt es zu einem $a \in S$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a^m = 0$, so nennt man a nilpotent.

Aufgabe 48

Es sei $R(\mathbb{R}) = Mat(n, n, \mathbb{R})$ der Ring der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Teilmenge $D \subset R(\mathbb{R})$ der Diagonalmatrizen bildet einen Unterring von $R(\mathbb{R})$.

b) Die Teilmenge $S \subset R(\mathbb{R})$ der symmetrischen Matrizen bildet einen Unterring von $R(\mathbb{R})$.

c) Die Teilmenge
$$T := \{(a_{ij} \in R(\mathbb{R}) | a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$$
aller oberen Dreiecksmatrizen bildet einen Unterring von $R(\mathbb{R})$.

d) Die Teilmenge
$$T_0 := \{(a_{ij} \in R(\mathbb{R}) | a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}$$
aller streng oberen Dreieckmatrizen bildet ein Ideal von T.

Abgabe: Bis Montag, den 12. Juli 2009, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.