Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 17 (6 Punkte)

Es sei f eine Isometrie eines euklid'schen oder unitären Vektorraumes. Zeigen Sie:

a) Für alle Eigenwerte λ von f gilt $|\lambda| = 1$.

b) Sind $\lambda_1,\ \lambda_2$ zwei verschiedene Eigenwerte von f, dann gilt: $E_f(\lambda_1) \perp E_f(\lambda_2)$, wobei $E_f(\lambda)$ den zu λ gehörigen Eigenraum bezeichnet.

Aufgabe 18 (6 Punkte)

Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Die (nicht notwendig lineare!) Abbildung $F : V \longrightarrow V$ sei "längentreu", d.h. es gilt

$$||F(u) - F(v)|| = ||u - v|| \text{ für alle } u, v \in V$$

Die Abbildung $f : V \longrightarrow V$ sei definiert durch

$$f(x) = F(x) - F(0) \text{ für alle } x \in V$$

Zeigen Sie:

a) $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$.

b) f ist eine lineare Abbildung.

Aufgabe 19 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A hermite'sch ist.

b) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix U, so dass $U^H AU$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ heißt schief-hermite'sch, wenn $A = -A^H$ gilt.

a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ schief-hermite'sch ist, dann gilt $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ oder $A \in Mat_{n\times n}(i\mathbb{R})$. Dabei bezeichnet $i\mathbb{R}$ die Menge der komplexen Zahlen ib mit $b \in \mathbb{R}$.

b) Beweisen Sie: Wenn A schief-hermite'sch ist, dann liegen alle Eigenwerte von A in $i\mathbb{R}$.

   Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\langle B^H x, y\rangle = \langle x, By\rangle$ für alle $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ und alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

c) Gilt die Umkehrung von b)?

Abgabe: Bis Donnerstag, 28.05.2009, 12:00 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage