

## Übung Funktionalanalysis

Blatt 1

### Hausaufgabe

Abgabe: Dienstag, 12.04.2011 (in der Übung)

#### Aufgabe 1

Sind folgende Funktionen Metriken in  $\mathbb{R}$ ?

a)  $d(x, y) = |x - y|^{\frac{1}{2}}$ ,

b)  $d(x, y) = \sin^2(x - y)$ ,

c)  $d(x, y) = |x - y|^p$ ,  $p$  reell, positiv,

d)  $d(x, y) = |x^p - y^p|$ ,  $p$  natürlich. (4 Punkte)

#### Aufgabe 2

Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Man zeige: Ist  $d(x, y)$  eine Metrik in  $M$ , so ist auch

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (x, y \in M)$$

eine Metrik in  $M$ . (4 Punkte)

#### Aufgabe 3

Sei  $M$  eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad (x, y \in M)$$

eine Metrik ist. Beschreiben Sie offene und abgeschlossene Mengen  $A \subset M$  im metrischen Raum  $(M, d)$ . (4 Punkte)

#### Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Abschließung der offenen Kugel  $U_r(x_0)$  in der abgeschlossenen Kugel  $\tilde{U}_r(x_0)$  liegt. Kann echtes Enthaltensein vorliegen? (4 Punkte)

## Übungsaufgaben

#### Aufgabe 5

Sei  $X = [0, 1] \cup \{2\}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Welche der Mengen  $\emptyset, [0, 1], (0, 1), \{2\}, X$  sind offen, welche abgeschlossen?

#### Aufgabe 6

Welche Eigenschaften muss  $f$  besitzen, damit  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$  eine Metrik auf  $\mathbb{R}$  ist?

### Aufgabe 7

- a) Wir definieren  $\text{diam } A = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ . Zeigen Sie  $0 \leq \text{diam } U_r(x_0) \leq 2r$ , und geben Sie ein Beispiel mit  $\text{diam } U_1(x_0) = \frac{1}{2}$  an.
- b) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes an, in dem  $U_{r_1}(x_1) \subset U_{r_2}(x_2)$  gilt, obwohl  $r_1 > r_2$  gilt.

### Aufgabe 8

Sind folgende Funktionen Metriken auf  $X$ ?

- a)  $X = C[a, b]$ ,  $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$ ,
- b)  $X = l^\infty := \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{R}, \{x_k\} \text{ beschränkt}\}$ ,  $d(x, y) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$ .

Homepage der Veranstaltung ist:

[http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV\\_feldhordt\\_SS11.shtml](http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml)

### Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	08-10	LE 103	Arnd Rösch
	Do	08-10	LE 103	
Ü	Di	12-14	LE 103	Hendrik Feldhordt