# Übung Funktionalanalysis

Blatt 2

# Hausaufgabe

**Abgabe: Dienstag, 19.04.2011 (in der Übung)**

**Aufgabe 1**
Welche der folgenden Mengen $X$ bilden bzgl. der jeweiligen Metiken $d$ einen vollständigen metrischen Raum?

(a) Sei $X = [0,1)$, $d(x,y) = |x-y|$

(b) $X = C[-1,1]$, $d(f,g) = (\int\limits_{-1}^{1} |f(t)-g(t)|^2 \, dt)^{\frac{1}{2}}$ (4 Punkte)

**Aufgabe 2**
Sei $X$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $(X,d)$ vollständig und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $(Y,d)$ ein vollständiger metrischer Raum.

(b) Ist $Y \subset X$ und $(Y,d)$ vollständig, so ist $Y$ (als Teilmenge des metrischen Raums $(X,d)$) abgeschlossen in $X$. (4 Punkte)

**Aufgabe 3**
Sind die folgenden metrischen Räume vollständig?

(a) $(\mathbb{N}, d_1)$, $d_1(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$

(b) $(\mathbb{N}, d_2)$, $d_2(m,n) = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n} & \text{sonst} \end{cases}$

Geben Sie gegebenenfalls eine Vervollständigung an. (4 Punkte)

**Aufgabe 4**
Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $A, B, C \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $A$ ist dicht in $B \Leftrightarrow \bar{A}$ ist dicht in $B$.

(b) $A$ ist nirgends dicht in $B \Leftrightarrow \bar{A}$ ist nirgends dicht in $B$.

(c) Ist $A$ dicht in $B$ und $B$ dicht in $C$, so ist $A$ dicht in $C$.

(d) Eine abgeschlossene Menge $F \subset X$ ist nirgends dicht $\Leftrightarrow$ das Komplement $X \setminus F$ ist überall dicht. (4 Punkte)

# Übungsaufgaben

**Aufgabe 5**

Sei $X$ die Menge aller Zahlenfolgen und $d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|}$. Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik ist und dass $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.

**Aufgabe 6**

Sei $d$ eine Metrik in $X$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

ebenfalls eine Metrik ist. Was lässt sich über die Vollständigkeit von $(X, \tilde{d})$ sagen, wenn $(X,d)$ vollständig ist?

**Aufgabe 7**

Es sei $f$ eine monoton wachsende Funktion, welche $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}$ (d.h. surjektiv) abbildet und $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}, d)$ vollständig ist.

**Aufgabe 8**

Welche der folgenden metrischen Räume $(X,d)$ sind vollständig?

(a) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |e^x - e^y|$

(b) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

(c) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml`

**Termine und Räume:**

| | | Zeit | Raum | |
|---|---|---|---|---|
| VL | Di | 08-10 | LE 103 | Arnd Rösch |
| | Do | 08-10 | LE 103 | |
| Ü | Di | 12-14 | LE 103 | Hendrik Feldhordt |