SS 2011 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

# Übung Funktionalanalysis

Blatt 3

# Hausaufgabe

**Abgabe: Dienstag, 26.04.2011 (in der Übung)**

**Aufgabe 1**
Zeigen Sie, dass der Raum

$$l^p := \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$$

versehen mit der Metrik

$$d(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$$

für $x, y \in l^p$ separabel ist.
Tipp: Man zeige, dass die Menge aller Folgen mit endlich vielen, nicht verschwindenden rationalen Koeffizienten dicht in $l^p$ liegt. (4 Punkte)

**Aufgabe 2**
Zeigen Sie: Jeder Teilraum eines separablen metrischen Raumes ist separabel. (4 Punkte)

**Aufgabe 3**
Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind bzgl. $d(x,y) := |x-y|$ kontrahierend? Geben Sie gegebenenfalls den kleinstmögleichen Kontraktionsfaktor an.

(a) $f(x) = \frac{x}{2}$

(b) $f$ ist lipschitzstetig

(c) $f$ ist differenzierbar und $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1$ (4 Punkte)

**Aufgabe 4**
Sei $(X,d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung. $T^n$ sei eine Kontraktion. Man zeige, dass die Gleichung $x = Tx$ genau eine Lösung $x \in X$ hat.

(4 Punkte)

# Übungsaufgaben

**Aufgabe 5**
Seien $(X, d_1)$ und $(Y, d_2)$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass jede kontrahierende Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

**Aufgabe 6**
Zeigen Sie, dass der Raum $l^\infty$ versehen mit der Supremumsnorm kein separabler metrischer Raum ist.

**Aufgabe 7**
Sei $k(t,s): \ [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $c: \ [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß die Volterrasche Integralgleichung 2. Art

$$x(t) = c(t) + \lambda \int_0^t k(t,s)x(s)\,ds, \quad t \in [0,T]$$

in $C[0,T]$ eindeutig lösbar ist.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml`

**Termine und Räume:**

| | | Zeit | Raum | |
|---|---|---|---|---|
| VL | Di | 08-10 | LE 103 | Arnd Rösch |
| | Do | 08-10 | LE 103 | |
| Ü | Di | 12-14 | LE 103 | Hendrik Feldhordt |