SS 2011 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Funktionalanalysis

Blatt 4

Hausaufgabe

Abgabe: Dienstag, 03.05.2011 (in der Übung)

Aufgabe 1
Sei m der Raum der beschränkten Zahlenfolgen versehen mit der Supremumsnorm. Finden Sie Folgen x_n so, dass

(a) $x_n \in m \cap l_1$, x_n konvergiert in m, aber nicht in l_1;

(b) $x_n \in m \cap l_2$, x_n konvergiert in m, aber nicht in l_2;

(c) $x_n \in l_2 \cap l_1$, x_n konvergiert in l_2, aber nicht in l_1. (4 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit des Systems $\{f_n : f_n(t) = t^n\}_{n=0}^{\infty}$ in $C[0,1]$.

(b) Konvergieren die Folgen $f_n(t) = t^n - t^{n+1}$ und $g_n(t) = t^n - t^{2n}$ in $C[0,1]$? (4 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie: Ein linearer normierter Raum ist vollständig genau dann, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert. (4 Punkte)

Aufgabe 4
Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie:

(a) Zwei Normen auf X sind genau dann äquivalent, wenn aus der Konvergenz in der einen Norm die Konvergenz in der anderen Norm folgt;

(b) Sind auf X zwei äquivalente Normen gegeben, und ist X bezüglich einer ein Banachraum, dann auch bezüglich der anderen;

(c) Ist X reeller (komplexer) Raum mit $\dim X = n < \infty$, so ist X isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$);

(d) Ist $\dim X < \infty$, so ist X ein Banachraum. (4 Punkte)

Übungsaufgaben

Aufgabe 5
Sei X ein normierter Raum und $X_0 \subset X$ eine lineare Teilmenge mit $\dim X_0 < \infty$. Dann gilt: $\forall x \in X\ \exists x_0 \in X_0 :\ \|x - x_0\| = d(x, X_0)$.

Aufgabe 6 Sind folgende Räume normiert oder sogar Banachräume ?

(a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $\|x\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$.

(b) Die Menge aller Hölderstetigen Funktionen mit Exponent $\mu \in (0,1)$ auf $[0,1]$ mit der Norm

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{\substack{t_1,t_2\in[0,1]\\ t_1\neq t_2}} \frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\mu}$$

(c) Die Menge der Funktionen beschränkter Variation auf $[0,1]$ mit

$$\|x\| = |x(0)| + V_0^1(x), \qquad V_0^1(x) = \sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1} \sum_{k=0}^{n-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)|$$

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	08-10	LE 103	Arnd Rösch
	Do	08-10	LE 103	
Ü	Di	12-14	LE 103	Hendrik Feldhordt