SS 2011 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Funktionalanalysis

Blatt 5

Hausaufgabe

Abgabe: Dienstag, 10.05.2011 (in der Übung)

Aufgabe 1
Sei X ein normierter Raum, in dem die Parallelogrammidentität erfüllt ist. Man zeige: Ist X reell, dann ist durch

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ein Skalarprodukt definiert. (4 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Seien x_n, y_n Elemente der abgeschlossenen Einheitskugel eines Hilbertraumes. Zeigen Sie, dass aus $(x_n, y_n) \to 1$ folgt $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(b) Sei x_n ein ONS in einem Hilbertraum. Zeigen Sie $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ falls $m \neq n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Seien $x, y \in L^2(0,1)$ und $\omega \in L^\infty(0,1)$. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass

$$(x,y)_\omega := \int_0^1 \omega(t)x(t)y(t)dt$$

ein Skalarprodukt in $L^2(0,1)$ ist. Wann ist die durch $(\cdot,\cdot)_\omega$ induzierte Norm äquivalent zur L^2-Norm? (4 Punkte)

Aufgabe 4
Es sei H ein reeller Hilbertraum und K eine konvexe, abgeschlossene und nichtleere Teilmenge von H. Zeigen Sie: Die Minimierungsaufgabe

$$\inf_{y\in K} \|x-y\|_H$$

besitzt für alle festen $x \in H$ genau eine Lösung $\overline{x}$ in K. Diese erfüllt die Ungleichung

$$(x-\overline{x}, \overline{x}-z) \geq 0 \qquad \forall z \in K.$$

(4 Punkte)

Übungsaufgaben

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass sich nur für $p = 2$ ein Skalarprodukt in l^p finden lässt mit $(x, x) = \|x\|_{l^p}^2$ $\forall x \in l^p$.

Aufgabe 6
Sei X ein unitärer Raum. Zeigen Sie:

(a) $x, y \in X$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt $(y, y)x = (x, y)y$.

(b) $x, y \in X$ sind genau dann orthogonal, wenn gilt $\|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2 = \|\alpha x + \beta y\|^2$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	08-10	LE 103	Arnd Rösch
	Do	08-10	LE 103	
Ü	Di	12-14	LE 103	Hendrik Feldhordt