SS 2011
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

# Übung Funktionalanalysis

Blatt 9

# Hausaufgabe

**Abgabe: Dienstag, 07.06.2011 (in der Übung)**

## Aufgabe 1

(a) Seien $H$ ein Hilbertraum und $y, z \in H \backslash \{0\}$ fest. Für $x \in H$ sei $Ax := \langle x, y \rangle z$. Man zeige $A \in \mathcal{L}(H)$ und bestimme den Operator $A^*$.

(b) Für $H = L^2(0,1)$ definiere den Operator$A : H \to H$, $(Au)(t) := \int\limits_0^t e^{(t-s)} u(s) ds$. Zeigen Sie, dass gilt $A \in \mathcal{L}(H)$ und bestimmen Sie den adjungierten Operator $A^*$. (4 Punkte)

## Aufgabe 2

Seien $X, Y$ Banachräume und $A, A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Implikationen sind wahr?

(a) $A_n$ konvergiert in der Operatornorm gegen $A \Rightarrow A_n^*$ konvergiert in der Operatornorm gegen $A^*$.

(b) $A_n$ konvergiert punktweise gegen $A \Rightarrow A_n^*$ konvergiert punktweise gegen $A^*$.

(c) $A_n$ konvergiert schwach gegen $A \Rightarrow A_n^*$ konvergiert schwach gegen $A^*$. (4 Punkte)

## Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie ein Analogon zur Hölderschen Ungleichung für drei Terme und Exponenten $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

(b) Gegeben seien $u \in L^2(\Omega)$ und $v \in L^6(\Omega)$. In welchem Raum $L^p(\Omega$ liegt das punktweise Produkt $uv$? (4 Punkte)

## Aufgabe 4

In welchem Raum $H^m((-1,1))$, $m \in \mathbb{N}$ liegen die folgenden Funktionen?

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\pi x)$ (4 Punkte)

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml`

**Termine und Räume:**

| | | Zeit | Raum | |
|---|---|---|---|---|
| VL | Di | 08-10 | LE 103 | Arnd Rösch |
| | Do | 08-10 | LE 103 | |
| Ü | Di | 12-14 | LE 103 | Hendrik Feldhordt |