

Übung Funktionalanalysis

Blatt 10

Abgabe: Dienstag, 21.06.2011 (in der Übung)

Aufgabe 1

Sei X ein Banachraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_n, x \in X$ und $f_n, f \in X^*$. Zeigen sie, dass aus jeder der Beziehungen

(a) $x_n \rightarrow x, f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$

(b) $x_n \rightharpoonup x, f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$

(c) $x_n \rightarrow x, f_n \rightharpoonup^* f$ für $n \rightarrow \infty$

folgt $\langle x_n, f_n \rangle_D \rightarrow \langle x, f \rangle_D$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2

Für $x \in C^1[-1, 1]$ seien f_ε und f_0 definiert durch

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} (x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)), \quad f_0(x) := x'(0).$$

Zeigen Sie, dass gilt $f_\varepsilon, f_0 \in (C^1[-1, 1])^*$ und $f_\varepsilon \rightharpoonup^* f_0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Gilt auch $f_\varepsilon \rightarrow f_0$?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}|x|x$ und schneiden Sie diese bei $\pm\varepsilon$ durch $g_\varepsilon(x) := 2x \mp \varepsilon$ ab.

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Für $1 < p < \infty$ und $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ seien $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p([a, b])$ und $f \in L^p([a, b])$.

Man zeige, dass $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ analog zur Situation in Hilberträumen genau dann gilt, wenn

(i) $\|f_k\| \rightarrow \|f\|, k \rightarrow \infty,$

(ii) $f_k \rightharpoonup f, k \rightarrow \infty.$

Hinweis: Um die Rückrichtung zu zeigen empfiehlt es sich, für die Bedingung (ii) die Funktion $g(x) := |f(x)|^{p-2}f(x)$ zu verwenden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4

Seien X ein Banachraum und $f_n, f \in X^*, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass gilt $f_n \rightharpoonup^* f, n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn gilt

(i) Es existiert ein $K > 0$ so, dass gilt $\|f_n\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\langle x, f_n \rangle_D \rightarrow \langle x, f \rangle_D$ für alle $x \in M$ und eine Menge M mit $\overline{\text{span}(M)} = X$ (4 Punkte)

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS11.shtml

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	08-10	LE 103	Arnd Rösch
	Do	08-10	LE 103	
Ü	Di	12-14	LE 103	Hendrik Feldhordt