2.17 Integration

2.17.1 Das unbestimmte Integral

Mit der Integration wird das Umkehrproblem gelöst, aus der Ableitung f' die ursprüngliche Funktion *f* zu rekonstruieren; d.h.:

Zu einer gegebenen Funktion *f* wird eine Funktion *F* gesucht, die die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt.

Definition 2.17.1.1:
Sei *F*: (*a,b*) $\rightarrow$ IR eine Funktion mit $F'(x) = f(x)$, dann heißt *F* ***Stammfunktion*** der Funktion *f*.

Beispiel 2.17.1.1:
Die Funktion $F\colon \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR},\ F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$, denn es gilt:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 .$$

Die Stammfunktionen eine Funktion *f* ist *nicht eindeutig* bestimmt. Wir können nämlich zu der im obigen Beispiel angegebenen Funktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine beliebige Konstante *C* addieren und erhalten wieder eine Stammfunktion der Form $F_1(x) = F(x) + C$.

Definition 2.17.1.2 (unbestimmtes Integral):

(2.17.1.1) $$\int f(x)dx := F(x) + C ,$$

zu lesen: Integral über $f(x)dx$ gleich $F(x) + C$.

Dabei ist $f(x)$ der ***Integrand***, *x* die ***Integrationsvariable*** und *C* die ***Integrationskonstante***.

Es stellen sich nun die zwei folgenden Fragen:

- Existiert zu *jeder* Funktion immer eine Stammfunktion *F*; d.h. ist jede Funktion *f* integrierbar?

- Lässt sich diese Stammfunktion *F* auch immer berechnen?

Damit die Beziehung (2.17.1.1) sinnvoll ist, muss die Funktion *F* differenzierbar sein. Die Existenz einer Stammfunktion *F* zu einer gegebenen Funktion *f* ist gesichert, wenn *f* in dem betrachteten Intervall stetig und beschränkt ist. Ist das Intervall abgeschlossen, so genügt es natürlich nur die Stetigkeit von *f* zu verlangen.

Die Frage 2 wird in den nächsten Kapitel ausführlich behandelt.

Einige Stammfunktionen lassen sich einfach aus den Differentationsregel durch Umkehrung gewinnen.

Beispiel 2.17.1.2:

(i) Aus $(\sin x)' = \cos x$ folgt $\int \cos x dx = \sin x + C$.

(ii) Aus $\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = x^n$ folgt $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.

Die nach dem obigen Verfahren herleitbaren Formeln zur Bestimmung von Stammfunktionen werden ***Grundintegrale*** genannt. Einige dieser Grundintegrale sind in der folgenden Übersicht aufgeführt. Eine komplette Liste der Grundintegrale findet man in den bekannten Formel-sammlungen (z.B. Bronstein-Semendjajew, Stöcker).

2.17.1.3 Beispiele für Grundintegrale:

$(C)' = 0$	$\int 0 dx = C$
$\left.\begin{array}{l}(\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln(-x))' = \frac{1}{x}\end{array}\right\}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$	$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$

2.17.2 Das bestimmte Integral

Im vorhergehenden Kapitel wurde immer vorausgesetzt, dass die zu integrierende Funktion *f* entweder in [*a,b*] stetig oder in (*a,b*) stetig und beschränkt ist. Wir wollen nun untersuchen, ob auch Funktionen integriert werden können, die im Inneren eines Intervalls unstetig sind. Zu diesem Zweck wird im folgenden der Integralberiff völlig unabhängig vom Begriff der Ableitung entwickelt. Den Ausgang bildet das Problem der Flächeninhaltsberechnung. Es soll der Inhalt ***A*** einer Fläche berechnet werden, deren Berandung nach oben durch eine Kurve, nach den Seiten durch zwei Ordinaten und nach unten durch einen Abschnitt der *x*-Achse festgelegt ist (s. Abb. 2.17.2.1).

Vorerst setzen wir voraus, dass die Funktion *f* im Intervall [*a,b*] stetig ist und dort auch keine negativen Funktionswerte hat. Wir werden später sehen, dass wir auf diese Voraussetzungen verzichten können. Zum Inhalt der im nebenstehenden Bild dargestellten Fläche kommt man durch die folgenden Überlegungen.

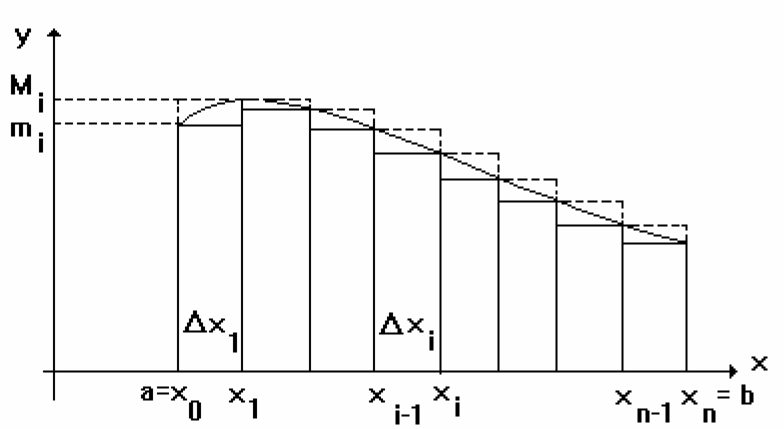

Abb. 2.17.2.1 Zerlegung des Intervalls [a,b] in Teilintervalle

Das Intervall [*a,b*] zerlegen wir auf beliebige Art in *n* Teilintervalle:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Breite des *i*-ten Teilintervalls ist $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Die Ordinaten von je zwei aufeinanderfolgenden Stellen x_k und x_{k+1} begrenzen einen Flächenstreifen. Wählen wir nun als Höhe des *i*-ten Streifens einmal die kleinste Ordinate

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f,$$

zum anderen die größte Ordinate

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f,$$

so erhalten wir zwei Rechtecke mit den Flächen $m_i \Delta x_i$ bzw. $M_i \Delta x_i$. Das erste Rechteck ist kleiner oder gleich, das zweite größer oder gleich dem gesuchten Flächenstreifen. Entsprechendes gilt für die Summe dieser Rechtecke im Vergleich zur gesuchten Fläche ***A***

(2.17.2.1) $$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le A \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S_n.$$

Die Summe s_n nennt man *nte*-***Untersumme***, da sie immer kleiner oder höchstens gleich dem Flächeninhalt ***A*** ist. Die Summe S_n heißt *nte*-***Obersumme***; sie ist mindestens gleich oder größer ***A***.

Wir können also mit einer solchen Zerlegung zwei Werte angeben, zwischen denen der gesuchte Flächeninhalt liegt. Wird nun die Zerlegung des Intervalls verfeinert, indem die Anzahl der Teilintervalle erhöht und damit die Breite Δx_i der Teilintervalle verringert wird, so kann gemäß Konstruktion die Untersumme s_n höchstens größer und die Obersumme S_n nur kleiner werden. Wählen wir die Zerlegung immer feiner, indem wir die Anzahl n der Teilintervaller unbegrenzt wachsen und damit Δx_i gegen Null streben lassen, so bilden die Untersummen s_n eine monoton wachsende beschränkte Folge und die Obersummen S_n eine monoton fallende beschränkte Folge. Nach ***Satz 2.7.3*** existiert für solche Folgen ein Grenzwert. Wir setzen daher

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{bzw.} \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Sind diese beiden Werte gleich, so nennt man ihren gemeinsamen Wert bestimmtes Integral und schreibt dafür:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \;.$$

Da nach (2.17.2.1) der Flächeninhalt ***A*** für die Folge $\{s_n\}$ eine obere und für die Folge $\{S_n\}$ eine untere Schranke ist, können die beiden Grenzwerte s und S nur dann gleich sein, wenn sie beide gleich A sind. Demnach ist unter den angegebenen Voraussetzungen

$$\int_a^b f(x)dx = A\,.$$

Bemerkung 2.17.2.1:

(i) Der Inhalt einer Fläche im obigen Sinne ist genau dann ein sinnvoller Begriff, wenn die Folge der Untersummen und die Folge der Obersummen einen gemeinsamen Grenzwert haben; d.h. wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n - s_n\right) = 0\,.$$

(ii) Dass der Grenzwert s der Untersummen und der Grenzwert S der Obersummen verschieden seien können, zeigt folgendes Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}] \wedge x \in Q \\ 2, \text{ falls } \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}] \wedge x \in I \end{cases}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 1.\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty} 1.\left(b-a\right) = (b-a) \end{aligned}.$$

Genauso zeigt man:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 2(b-a).$$

Also ist $s \neq S$ und somit existiert für diese Funktion im obigem Sinne kein sinnvoller Flächenbegriff.

Wir verwenden nun als Höhe der Rechtecke nicht mehr die kleinste und die größte Ordinate eines Teilintervalls, sondern eine beliebige Stützstelle $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit der Ordinate $f(\zeta_i)$. Für den Flächeninhalt eines jeden Rechtecks gilt dann:

$$m_i \Delta x_i \leq f(\zeta_i)\Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$$

und für die Summen der Rechteckflächen

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

Bezeichnen wir die mittlere Summe mit σ_n, so erhalten wir:

(2.17.2.2) $$s_n \leq \sigma_n \leq S_n$$

Konvergieren Untersumme und Obersumme gegen einen gemeinsamen Grenzwert, so konvergiert wegen (2.17.2.2) die Folge $\{\sigma_n\}$ gegen den gleichen Grenzwert; d.h.:

(2.17.2.3) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

Die Ungleichung (2.17.2.2) gilt für jede Wahl der Stützstelle ξ_i. Die Existenz des Grenzwertes (2.17.2.3) ist also nicht von der Wahl der ξ_i abhängig, sondern ausschließlich von der Gleich-heit der Grenzwerte *s* und *S*. Nach ***Riemann*** läßt sich daher folgendes definieren:

Definition 2.17.2.1 (Riemann-Integral):
Eine Funktion *f* ist genau dann im Intervall [*a,b*] ***integrierbar***, wenn bei ***jeder*** Zerlegung ***jede*** der Folgen $\{\sigma_n\}$ den gleichen endlichen Grenzwert hat. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

heißt ***bestimmtes Integral*** der Funktion *f* im Intervall [*a,b*].

Bemerkung 2.17.2.2:

(i) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist eine Zahl.

(ii) Die Integrationsvariable kann beliebig gewählt werden:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du\,.$$

(iii) Zur Vermeindung von Fallunterscheidungen setzen wir:

$$\int_a^a f(x)dx := 0; \quad \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx\text{, falls a < b.}$$

Wir hatten bisher angenommen, dass die zu intergrierende Funktion f positiv ist. Verläuft die Kurve der Funktion $y = f(x)$ ganz unterhalb der x-Achse, d.h. $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so können wir den entsprechenden Flächeninhalt wie folgt berechnen:

$$A = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -A\,.$$

Begrenzt die Kurve der Funktion $y = f(x)$ Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse, dann ist $\int_a^b f(x)dx$ die Summe der mit einem Vorzeichen versehenen Flächeninhalte; "+" für die oberhalb der x-Achse liegenden Teile und "-" für die unterhalb der x-Achse liegenden Teile (s. Abb. 2.17.2.2).

Will man den ***physikalischen*** Inhalt **I** dieser Flächen berechnen, so müssen die ***Beträge*** der "negativen" Flächen zu den "positive" Flächen addiert werden. Das geht so:

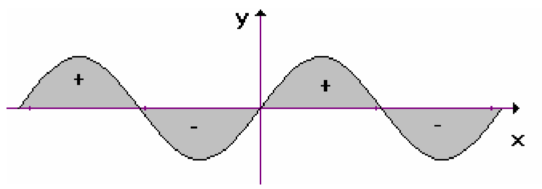

Abb. 2.17.2.2

Zunächst werden die Nullstellen n_i der Funktion f ermittelt. Dann wird das Intergrationsintervall mit Hilfe der Nullstellen n_i so zerlegt, dass über jedem Teilintervall entwerder eine "positive" oder eine "negative" Fläche liegt. Diese Flächen werden berechnet, wobei bei den "negativen" Flächen der ***Betrag*** des ermittelten Wertes zu nehmen ist. Diese Werte werden anschließend addiert.

Für unserer Beispielfunktion in Abb. 2.17.2.2 erhalten wir folgenden physikalischen Flächeninhalt:

$$\mathbf{I} = \int_a^{n_1} f(x)dx + \left| \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx \right| + \int_{n_2}^{n_3} f(x)dx + \left| \int_{n_3}^{b} f(x)dx \right|.$$

Dabei haben wir eine der folgenden elementaren Integrationsregeln benutzt, die direkt aus (2.17.2.3) folgen.

Satz 2.17.2.1:
Sei *f*: [*a,b*] $\rightarrow$ IR stetig, dann gilt:

(i) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad (\alpha, \beta \in \mathrm{IR}).$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a \leq c \leq b).$

(iii) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Im folgenden werden wir festlegen, welche Voraussetzungen wir benötigen, damit eine Funktion *f*: [*a,b*] $\rightarrow$ IR in unserem Sinne integrierbar ist. Wir benötigen dazu folgende

Definition 2.17.2.2:
Eine Funktion *f*: [*a,b*] $\rightarrow$ IR heißt **stückweise stetig**, wenn die Funktion f im Intervall [*a,b*] nur endlich viele Unstetigkeitsstelle besitzt.

Satz 2.17.2.2:
Die Funktion *f*: [*a,b*] $\rightarrow$ IR sei beschränkt und stückweise stetig, dann ist *f* in [*a,b*] integrierbar.

Bemerkung 2.17.2.2:
Satz 2.17.2.1 gilt auch für beschränkte und stückweise stetige Funktionen.

Die Unstetigkeitsstellen dürfen keine Unendlichkeitsstellen sein, da die Funktion sonst nicht beschränkt ist. Man darf daher niemals über Unendlichkeitsstellen des Integranden hinwegintegrieren. So ist z.B. die Funktion

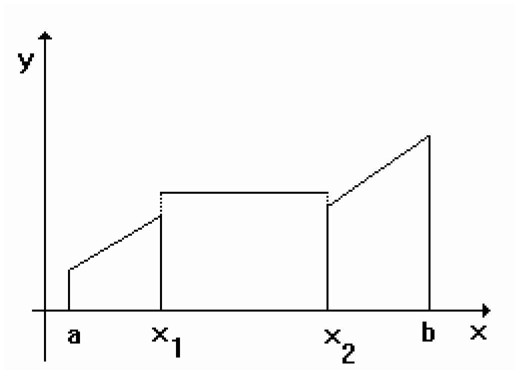

Abb.: 2.17.2.3

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

im Intervall [-1,1] nicht integrierbar, da bei $x = 0$ eine Unendlichkeitsstelle vorliegt. Bei Unstetigkeitsstellen endlicher Sprunghöhe wird beim praktischen Rechnen das Integrationsintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegt und dann ***Satz 2.17.2.1***(ii) angewendet.
Sind z.B. $x_1, x_2 \in (a,b)$ zwei solche Unstetigkeitsstellen von *f* (s. Abb. 2.17.2.3), so erhält man:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx\,.$$

Bemerkung 2.17.2.3:
Im Kapitel über *Uneigentliche Integrale* werden wir sehen, dass einige Unendlichkeitsstellen dennoch integrierbar sind, z.B. sind die Funktionen $\frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha \in (0,1)$ auf dem Intervall [0,1] integrierbar.

Satz 2.17.2.3 (Integralabschätzung):
Die Funktion f: $[a,b] \to$ IR sei stetig im Intervall $[a,b]$, dann gilt:

(i) $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$ und $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$,

(ii) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a \le b)$.

Eine für die weitere Theorie wichtige Anwendung ist der folgende

Satz 2.17.2.4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung):
Sind die Fuinktionen *f*, *g* auf $[a,b]$ stetig, $g(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt es wenigstens eine Stelle $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx\,.$$

Folgerung 2.17.2.1:
Als Spezialfall erhalten wir für $g(x) = 1$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a) \text{ für ein geeignetes } \xi \in [a,b].$$

Der im vorhergehenden Kapitel skizzierte Weg, aus $f = F'$ die Stammfunktion F zu konstruieren, führt auch zu einer einfachen Methode, bestimmte Integrale auszuwerten.

Wir benötigen dazu den folgenden ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung***.

Satz 2.17.2.5:

Ist f eine auf dem Intervall I stetige Funktion, $a,b \in$ I, dann gilt:

(i) **Existenz von Stammfunktionen:** Die durch $F_a(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in \mathrm{I})$

definierte Integralfunktion ist eine Stammfunktion von f; d.h.

(2.17.2.4) $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Jede andere Stammfunktion von f hat die Form $F(x) = F_a(x) + c$, $c \in$ IR.

(ii) **Integralberechnung:** Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).}$$

Damit haben wir das Berechnen eines bestimmten Integrals auf das Ermitteln der zum Integranden gehörenden Stammfunktion zurückgeführt.

Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)dx$ **:**

1. Schritt: Ermitteln der Stammfunktion *F* von *f*
(Probe: $F'(x) = f(x)$).

2. Schritt: Man berechnet $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Beispiel 2.17.2.1:

(i) Die von der Gravitationskraft $K(x) = g\frac{mM}{x^2}$ längs [*a,b*] geleisteten Arbeit beträgt:

$$W = \int_a^b K(x)dx = gmM\int_a^b \frac{1}{x^2}dx = gmM\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b = gmM\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

(ii) Es gilt: $$\int_a^b \frac{1}{x}dx = ln|b| - ln|a| = ln\frac{|b|}{|a|}$$

vorausgesetzt, das Intervall [*a,b*] enthält nicht den Nullpunkt. Insbesondere ergibt sich so die Integraldarstellung der ln-Funktion:

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad (x > 0).$$