Mathematik für Ökonomen – SS 2019 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

16.07.2019, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \ + x \geq \ 5$

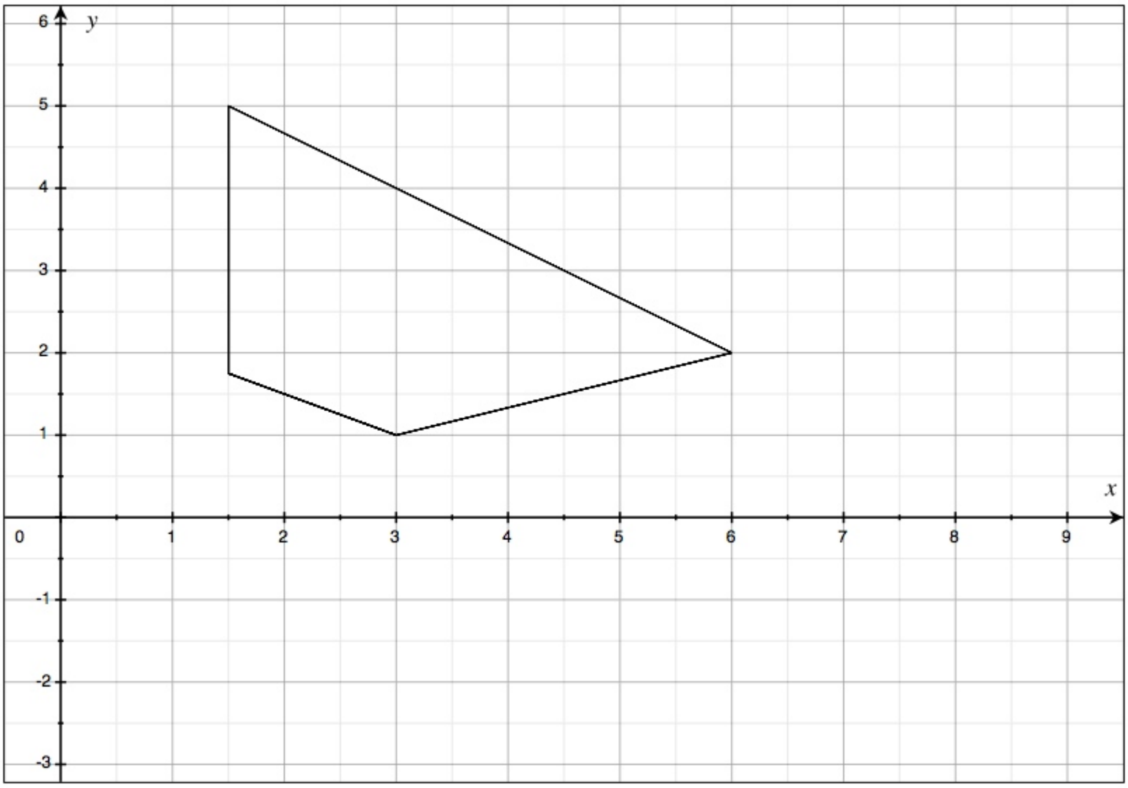
(2) $x \geq \ \frac{3}{2}$

(3) $x \ - \ 3 \cdot y \ \leq \ 0$

(4) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	1	2
	R_2	2	1	1

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	0	2	1
	Z_2	2	2	2
	Z_3	2	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2,3) \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = 151$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
3	-1	2	1	-1
2	0	1	1	-1
1	1	0	1	2

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b_1^*	b_2^*
1	0	1/2	1/2	-1/2
0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	0	0	0	3

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

(ii) Geben Sie eine Matrixgleichung an, die durch die Inverse von B gelöst wird.

Ergebniskontrolle:

(a) Im Schlußtableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen $L_{(b_1,b_2)} = \emptyset$.

(b)

zu (i):

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	(-1) · I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	I
0	4	-2	-1	1	0	II + I
0	-4	3	2	0	1	III - 2 · I
1	3	-1	-1	0	0	I
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	1/4 · II
0	-4	3	2	0	1	III

1	0	1/2	-1/4	-3/4	0	I - 3 · II
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	II
0	0	1	1	1	1	III + 4 · II
1	0	0	-3/4	-5/4	-1/2	I - 1/2 · III
0	1	0	1/4	3/4	1/2	II + 1/2 · III
0	0	1	1	1	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Die Inverse von B löst die folgende Matrixgleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 15% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 15% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.15)^{\frac{1}{5}} \approx 1.03 \Leftrightarrow i = 0.03 = 3\%$

(b) $K_x = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.15)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.14}{0.1} = \frac{14}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1) \cdot 100000 = (1.2)^5 \cdot 10^5 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.2^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \left(4 \cdot x\right)^{1/3} & \text{für} \quad -3 < x \leq -2 \\ \ln\left(e^3 + x + 2\right) - 5 & \text{für} \quad -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in x_0 = -2 : $\lim\limits_{x \to -2_-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2_-} \left(4 \cdot x\right)^{1/3} = \left(4 \cdot (-2)\right)^{1/3} = (-8)^{1/3} = -2$

RGW in x_0 = -2 : $\lim\limits_{x \to -2_+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2_+} \left(\ln\left(e^3 + x + 2\right) - 5\right) = \left(\ln(e^3) - 5\right) = 3 - 5 = -2$

FW in x_0 =2: $f(2) = \left(4 \cdot (-2)\right)^{1/3} = (-8)^{1/3} = -2$

Also gilt LGW = RGW = FW, und somit ist f stetig in $x_0 = -2$.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 1\right)$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left((x-1)^2 - 4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-1|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-1| = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = -2 \quad \text{oder} \quad x - 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 3 \end{aligned}$$

$-1 \notin D(f)$ und $3 \in D(f)$, also $x = 3$ einzige stationäre Stelle.

$$f''(x) = e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right) + e^x \cdot 2 \cdot (x-1)$$

$f''(3) = e^3 \cdot 0 + e^3 \cdot 4 = 4 \cdot e^3$, also $x = 3$ lokale Minimalstelle mit $f(3) = e^3 \cdot (9 - 12 + 1) = -2 \cdot e^3$.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = e^0 = 1$ und $f(4) = e^4(16 - 16 + 1) = e^4$, außerdem $(3, -2 \cdot e^3)$ einzige lokale Extremstelle, und Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend. Daher

$-2 \cdot e^3$ minimaler Wert von $f(0), f(3), f(4)$, also $(3, -2 \cdot e^3)$ globaler Minimalpunkt
e^4 maximaler Wert von $f(0), f(3), f(4)$, also $(4, e^4)$ globaler Maximalpunkt

[1](c) Geben Sie den globalen Maximalpunkt von $g(x) = -f(x)$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

Ergebniskontrolle:

$(3, -2 \cdot e^3)$ globaler Minimalpunkt, d.h. $f(x) \geq f(3)$ für alle $x \in [0, 4]$, also $-f(x) \leq -f(3)$ für alle $x \in [0, 4]$. Daher $(3, 2 \cdot e^3)$ globaler Maximalpunkt von $g(x) = -f(x)$.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}\ dt + \int_1^2 e^{t-1}\ dt \\
&= \left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot t^{1+\frac{1}{2}}\right]_0^1 + \int_1^2 e^t \cdot e^{-1}\ dt \\
&= \left[\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + e^{-1} \cdot \int_1^2 e^t\ dt \\
&= \left[\frac{2}{3} - 0\right] + e^{-1} \cdot \left[e^t\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} + e^{-1} \cdot \left[e^2 - e^1\right] \\
&= \frac{2}{3} - e^0 + e^1 = \frac{2}{3} - 1 + e^1 = -\frac{1}{3} + e^1
\end{aligned}$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \ln(x \cdot y + 1)$ $(x > 0, y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx} und f''_{xy} .

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = \frac{y}{x \cdot y + 1}$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{0 - y \cdot y}{(x \cdot y + 1)^2} = \frac{-y^2}{(x \cdot y + 1)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x}{x \cdot y + 1}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \frac{1 \cdot (xy + 1) - y \cdot x}{(x \cdot y + 1)^2} = \frac{1}{(x \cdot y + 1)^2}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x,y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 100$ und $y_0 = 400$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um 50% und die y-Variable um -30% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = x^{-1/2} \text{ und } f'_y(x,y) = 2 \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (100, 400)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 100 \cdot \frac{100^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{10}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{1}{10},$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 400 \cdot \frac{2 \cdot 400^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{40}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{2}{5}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{10} \cdot 50\% + \frac{2}{5} \cdot (-30\%) = -7\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(100, 400)$ zu $f(150, 280)$ beträgt ca. -7%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2\cdot x^2 - 8\cdot x\cdot y + y^4 + 16 \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:
$f'_x(x,y) = 4\cdot x - 8\cdot y$
$f'_y(x,y) = -8\cdot x + 4\cdot y^3$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\cdot x - 8\cdot y & = & 0 \\ -8\cdot x + 4\cdot y^3 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\cdot y \\ -4\cdot y + y^3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2\cdot y \\ y\cdot(y^2-4) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclll} x & = & 2\cdot y & & \\ y & = & 0 & \text{oder} & y^2 = 4 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclllll} y & = & 2\cdot x & & & & \\ y & = & 0 & \text{oder} & y = -2 & \text{oder} & y = 2 \end{array}\right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-4,-2), P2 = (0,0), P3 = (4,2)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0,y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 4$
$f''_{yy}(x,y) = 12\cdot y^2$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -8$

- $H_D(-4,-2) = 4\cdot 12\cdot(-2)^2 - (-8)^2 = 192 - 64 = 128 > 0$ und $f''_{xx}(-4,-2) = 4 > 0 \Rightarrow (-4,-2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(-4,-2) = 2\cdot 16 - 8\cdot 8 + 16 + 16 = 0$.
- $H_D(0,0) = 0 - (-8)^2 = -64 < 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0 - 0 + 0 + 16 = 16$.
- $H_D(4,2) = 4\cdot 12\cdot 2^2 - (-8)^2 = 128 > 0$ und $f''_{xx}(4,2) = 4 > 0 \Rightarrow (4,2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(4,2) = 2\cdot 16 - 8\cdot 8 + 16 + 16 = 0$.