# Mathematik für Ökonomen – SS 2019 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik für Ökonomen

16.07.2019, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** ___________________________________________

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

_______________________________________________________________________________

Abschnitt für Korrektur!

**Thema: Lineare Ungleichungssysteme**

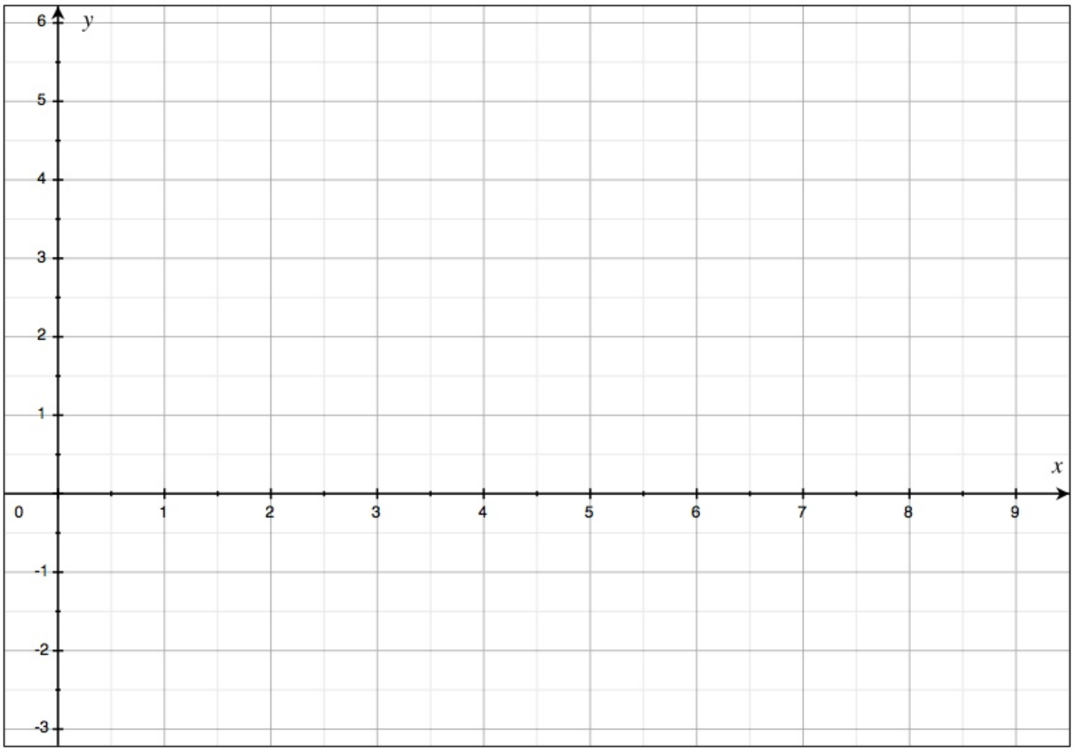
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

**(1)** $2 \cdot y + x \geq 5$

**(2)** $x \geq \frac{3}{2}$

**(3)** $x - 3 \cdot y \leq 0$

**(4)** $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$




(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Thema: Rechnen mit Matrizen**

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$\begin{array}{ll} & \text{Zwischenprodukte} \\ & \begin{array}{ccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \\ \text{Rohstoffe} \quad \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \text{Endprodukte} \\ & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \text{Zwischenprodukte} \quad \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}} \end{array}$$

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

**(a)** Berechnen Sie $M_{RE}$, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

**(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

## Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | -1 | 2 | 1 | -1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 2 |

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b_1^*$ | $b_2^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | -1/2 |
| 0 | 1 | -1/2 | 1/2 | -1/2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

(ii) Geben Sie eine Matrixgleichung an, die durch die Inverse von $B$ gelöst wird.

**Thema: Zinsrechnung**

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert $K_5$ um 15% über dem Anfangswert $K_0$ liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert $K_x$, der 15% über dem Anfangwert $K_0$ liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der $n$-ten Verzinsung soll $K_n$ <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert $K_5$ bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz $i_{\text{eff}}$.

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

**Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen**

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion $f$ an der „Nahtstelle“ $x_0 = -2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \left(4 \cdot x\right)^{1/3} & \text{für} \quad -3 < x \leq -2 \\ \ln\left(e^3 + x + 2\right) - 5 & \text{für} \quad -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen**

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 1\right)$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
$f$ hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von $f$ über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von $f$ über dem Definitionsbereich.

[1](c) Geben Sie den globalen Maximalpunkt von $g(x) = -f(x)$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

**Thema: Elementare Berechnung von Integralen**

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } \ 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{für } \ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

**Thema: Partielle Ableitungen**

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln(x \cdot y + 1)$ $(x > 0, y > 0)$
die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$ und $f''_{xy}$ .

**Thema: Partielle und totale Marginalanalyse**

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle $(x_0, y_0)$ mit $x_0 = 100$ und $y_0 = 400$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die $x$-Variable um $50\%$ und die $y$-Variable um $-30\%$ verändert.

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)**

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)