

Mathematik für Ökonomen – SS 2024 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

23.07.2024, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone, Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.

Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

[Seite 1 von 12]

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $3 \cdot y - 3 \cdot x \leq 3$

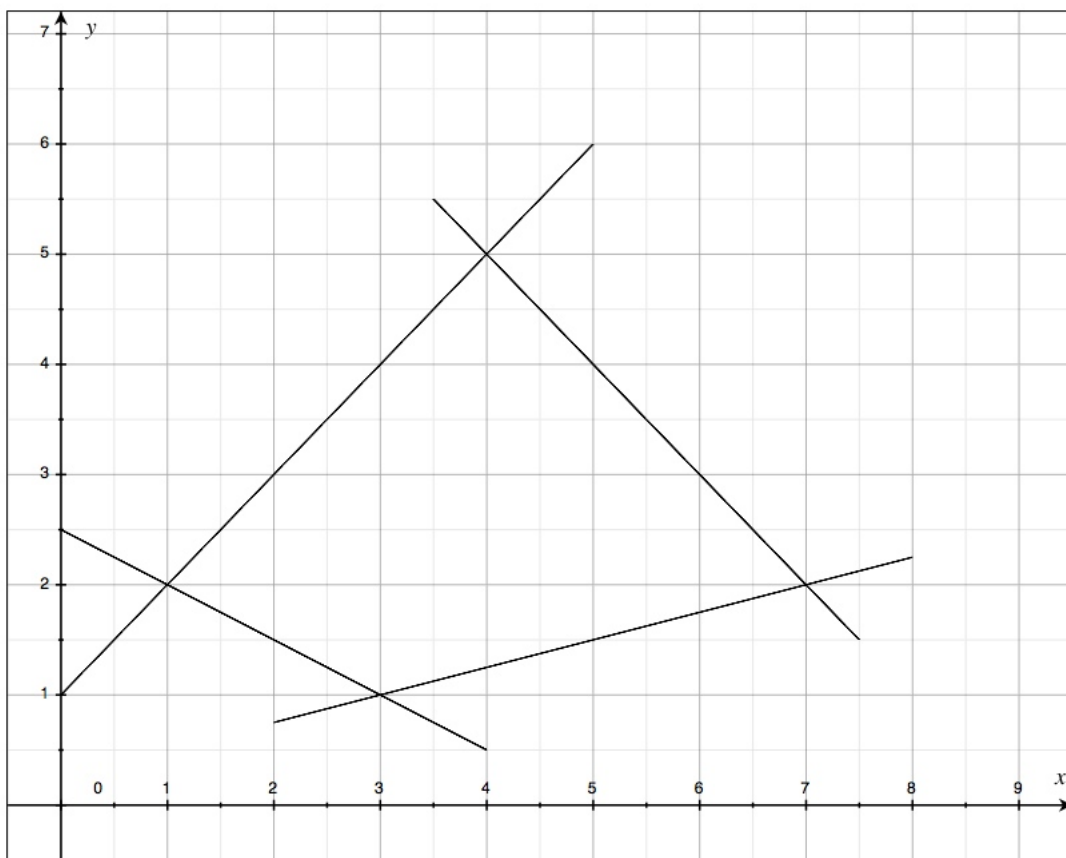
(2) $y + x \leq 9$

(3) $2 \cdot y + x \geq 5$

(4) $x - 4 \cdot y \leq -1$

Ergebniskontrolle:

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 + x \text{ und } y \leq 9 - x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

(a) $(C \cdot B) + A$

(b) B^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; (C \cdot B) + A = \begin{pmatrix} 22 & 8 & 11 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} .$

(b) Zunächst

$$B = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_D$$

Die Matrix D ist eine umgeordnete Einheitsmatrix, also $D^{-1} = D^T$. Dann folgt mit Rechenregeln für Inverse

$$B^{-1} = (2 \cdot D)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot D^{-1} = \frac{1}{2} \cdot D^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1, b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

$$\begin{array}{ccc|cc}
 x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\
 \hline
 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots \rightarrow}
 \begin{array}{ccc|cc}
 x_1 & x_2 & x_3 & b_1^* & b_2^* \\
 \hline
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\
 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3
 \end{array}$$

- [4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- [3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die allgemeine Lösung der Matrixgleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

- [1] (ii) Berechnen Sie die Inverse der Lösung der Matrixgleichung in (i).

Ergebniskontrolle:

- (a) Im Schlusstableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen $L_{(b_1, b_2)} = \emptyset$.

- (b) zu (i):

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	$(-1) \cdot I$
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	I
0	4	-2	-1	1	0	$II + I$
0	-4	3	2	0	1	$III - 2 \cdot I$
1	3	-1	-1	0	0	I
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	$1/4 \cdot II$
0	-4	3	2	0	1	III

1	0	1/2	-1/4	-3/4	0	I - 3 · II
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	II
0	0	1	1	1	1	III + 4 · II
1	0	0	-3/4	-5/4	-1/2	I - 1/2 · III
0	1	0	1/4	3/4	1/2	II + 1/2 · III
0	0	1	1	1	1	III

$$\text{Lösung: } X = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Die Lösung X der Matrixgleichung in (i) entspricht der Inversen B^{-1} von B , also ergibt sich aus Rechenregeln für Inverse $X^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B$.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 15% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x , der 15% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel 44%, 0%, 20%, 44%, 0%. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

- (a) $K_5 = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.15)^{\frac{1}{5}} \approx 1.03 \Leftrightarrow i = 0.03 = 3\%$
- (b) $K_x = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.15)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.14}{0.1} = \frac{14}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$
- (c) $K_5 = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1) \cdot 100000 = (1.2)^5 \cdot 10^5 = 12^5 = 248832$
 $i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1)^{\frac{1}{5}} - 1 = (1.2^5)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln(5)+x} - x - 4)$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln(5)+x} - x - 4) = e^{\ln(5)} - 4 = 5 - 4 = 1.$$

[2] (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^3 + x + 1}{6 \cdot x^4 - 15 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 1}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^3 + x + 1}{6 \cdot x^4 - 15 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \cdot (2 \cdot x^{-1} + x^{-3} + x^{-4})}{x^4 \cdot (6 - 15 \cdot x^{-2} + 8 \cdot x^{-3} - x^{-4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^{-1} + x^{-3} + x^{-4}}{6 - 15 \cdot x^{-2} + 8 \cdot x^{-3} - x^{-4}} = \frac{0}{6} = 0. \end{aligned}$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - (x+1)^2$ mit $D(f) = [0, e^1 - 1]$. **Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!**
 f hat die Ableitung $f'(x) = (x+1) \cdot (2 \cdot \ln(x+1) - 1)$.

- [5](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1) \cdot (2 \cdot \ln(x+1) - 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \ln(x+1) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \ln(x+1) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad \ln(x+1) = 1/2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x+1 = e^{1/2} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = e^{1/2} - 1 \end{aligned}$$

$-1 \notin D(f)$, und $1 = e^0 < e^{1/2} < e^1$, weil Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Also $0 < e^{1/2} - 1 < e^1 - 1$, weswegen $e^{1/2} - 1 \in D(f)$ kein Randpunkt. Daher $x = e^{1/2} - 1$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$$f''(x) = 2 \cdot \ln(x+1) - 1 + 2 = 2 \cdot \ln(x+1) + 1$$

$f''(e^{1/2} - 1) = 2 \cdot \ln(e^{1/2}) + 1 = 1 + 1 = 2 > 0$. Also $x = e^{1/2} - 1$ lokale Minimalstelle mit $f(e^{1/2} - 1) = (e^{1/2})^2 \cdot \ln(e^{1/2}) - (e^{1/2})^2 = e^1 \cdot \frac{1}{2} - e^1 = -\frac{1}{2} \cdot e^1$.

- [2](b) Untersuchen Sie auf globale **Maximalpunkte** (**Maximalstellen** und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$f(0) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = -1, \quad f(e^1 - 1) = (e^1)^2 \cdot \ln(e^1) - (e^1)^2 = e^2 - e^2 = 0.$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte besitzt, ergibt sich für den Funktionswert in der stationären Stelle: $f(e^{1/2} - 1) = -\frac{1}{2} \cdot e^1 < 0 = f(e^1 - 1)$.

Außerdem $f(0) = -1 < 0 = f(e^1 - 1)$. Insgesamt erhält man daher $(e^1 - 1, 0)$ als globalen Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ e^{2-t} & \text{für } 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Für $1 \leq x \leq 5$ sei $F(x) := \int_1^x f(t) dt$.

[5] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, 5]$.

[1] (b) Berechnen Sie $F\left(\frac{9}{4}\right)$.

Ergebniskontrolle:

(a) Für $1 \leq x \leq 4$ gilt

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^{-1/2} dt = \left[2 \cdot t^{1/2}\right]_1^x = 2 \cdot x^{1/2} - 2.$$

Für $4 < x \leq 5$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t) dt = \int_1^4 t^{-1/2} dt + \int_4^x e^{2-t} dt = F(4) + \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2-t}\right]_4^x \\ &= 2 \cdot 4^{1/2} - 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{2-x} - \frac{1}{2} \cdot e^8 \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{2-x} - \frac{1}{2} \cdot e^8. \end{aligned}$$

(b) $\frac{9}{4} \in]1, 4[$, also nach a)

$$F\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{1/2} - 2 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Thema: Partielle Ableitungen

- [4] Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) die partiellen Ableitungen f'_x , f'_y , sowie f''_{xx} , f''_{xy} .

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x, y) = 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$$

$$f''_{xx}(x, y) = 4 \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y} + 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y} \cdot 4 \cdot x = 4 \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y} + 16 \cdot x^2 \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$$

$$f'_y(x, y) = 3 \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y} \cdot 3 = 12 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot e^{y^2}$ eines Produktes in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 2$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität \mathcal{E}_x^f und die Arbeitselastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 20% erhöht und der Arbeitseinsatz um 1% verringert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(50, 2) = 50 \cdot \frac{f'_x(50, 2)}{f(50, 2)}$ und $\mathcal{E}_y^f(50, 2) = 2 \cdot \frac{f'_y(50, 2)}{f(50, 2)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 25 \cdot x^{-3/4} \cdot e^{y^2} \text{ und } f'_y(x, y) = 200 \cdot x^{1/4} \cdot e^{y^2} \cdot y.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 2)$

$$\mathcal{E}_x^f(50, 2) = 50 \cdot \frac{25 \cdot 50^{-3/4} \cdot e^4}{100 \cdot 50^{1/4} \cdot e^4} = \frac{50^{1/4}}{4 \cdot 10^{1/4}} = \frac{1}{4}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(50, 2) = 2 \cdot \frac{200 \cdot 2 \cdot 50^{1/4} \cdot e^4}{100 \cdot 50^{1/4} \cdot e^4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(50, 2) \cdot \frac{dx}{50} + \mathcal{E}_y^f(50, 2) \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{4} \cdot 20\% - 8 \cdot 1\% = 5\% - 8\% = -3\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50, 2)$ zu $f(60, 1.98)$ beträgt ca. -3% .

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[6] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \quad (x < 4, y > -5)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.

(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)**Ergebniskontrolle:**

$$f'_x(x, y) = 4 \cdot x - 8 \cdot y$$

$$f'_y(x, y) = -8 \cdot x + 4 \cdot y^3$$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot x - 8 \cdot y = 0 \\ -8 \cdot x + 4 \cdot y^3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ -4 \cdot y + y^3 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y \cdot (y^2 - 4) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y = 0 \text{ oder } y^2 = 4 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y = 0 \text{ oder } y = -2 \text{ oder } y = 2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$(-4, -2), (0, 0) \in D(f)$ und $(4, 2) \notin D(f)$. Also sind $P1 = (-4, -2), P2 = (0, 0)$ die stationären Punkte

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) :

$$f''_{xx}(x, y) = 4$$

$$f''_{yy}(x, y) = 12 \cdot y^2$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -8$$

- $H_D(-4, -2) = 4 \cdot 12 \cdot (-2)^2 - (-8)^2 = 192 - 64 = 128 > 0$ und $f''_{xx}(-4, -2) = 4 > 0 \Rightarrow (-4, -2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(-4, -2) = 2 \cdot 16 - 8 \cdot 8 + 16 + 16 = 0$.
- $H_D(0, 0) = 0 - (-8)^2 = -64 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0, 0) = 0 - 0 + 0 + 16 = 16$.