

Mathematik für Ökonomen – SS 2024 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

23.07.2024, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone, Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.

Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.

Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

[Seite 1 von 11]

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

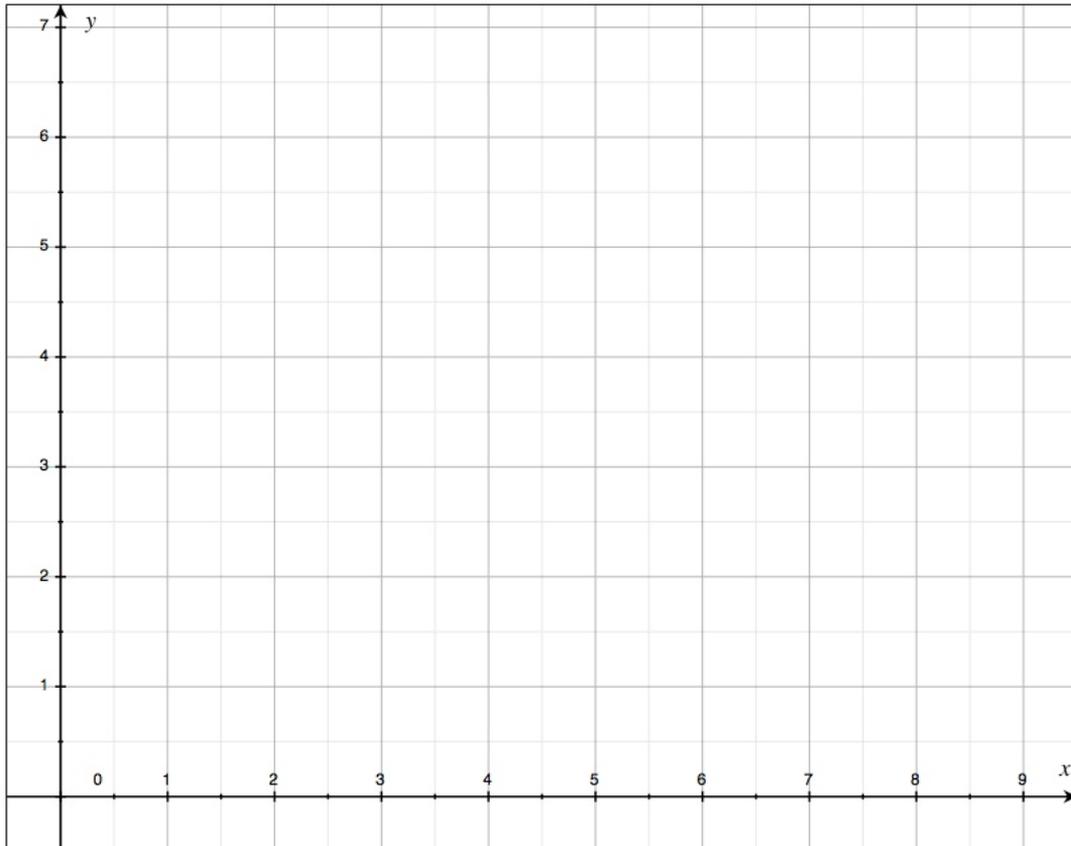
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $3 \cdot y - 3 \cdot x \leq 3$

(2) $y + x \leq 9$

(3) $2 \cdot y + x \geq 5$

(4) $x - 4 \cdot y \leq -1$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

(a) $(C \cdot B) + A$

(b) B^{-1}

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1, b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

$$\begin{array}{ccc|cc}
 x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\
 \hline
 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 2
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots}
 \begin{array}{ccc|cc}
 x_1 & x_2 & x_3 & b_1^* & b_2^* \\
 \hline
 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\
 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 3
 \end{array}$$

- [4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- [3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die allgemeine Lösung der Matrixgleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

- [1] (ii) Berechnen Sie die Inverse der Lösung der Matrixgleichung in (i).

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 15% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x , der 15% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel 44%, 0%, 20%, 44%, 0%. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\ln(5)+x} - x - 4)$

[2] (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x^3 + x + 1}{6 \cdot x^4 - 15 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 1}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - (x+1)^2$ mit $D(f) = [0, e^1 - 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
 f hat die Ableitung $f'(x) = (x+1) \cdot (2 \cdot \ln(x+1) - 1)$.

- [5](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extrempunkte (Extrempunkten und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.
- [2](b) Untersuchen Sie auf globale **Maximal**punkte (**Maximal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ e^{2-t} & \text{für } 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Für $1 \leq x \leq 5$ sei $F(x) := \int_1^x f(t) dt$.

[5] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, 5]$.

[1] (b) Berechnen Sie $F\left(\frac{9}{4}\right)$.

Thema: Partielle Ableitungen

- [4] Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = e^{2 \cdot x^2 + 3 \cdot y}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) die partiellen Ableitungen f'_x , f'_y , sowie f''_{xx} , f''_{xy} .

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot e^{y^2}$ eines Produktes in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 2$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität \mathcal{E}_x^f und die Arbeitselastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 20% erhöht und der Arbeitseinsatz um 1% verringert.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[6] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \quad (x < 4, y > -5)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.

(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)