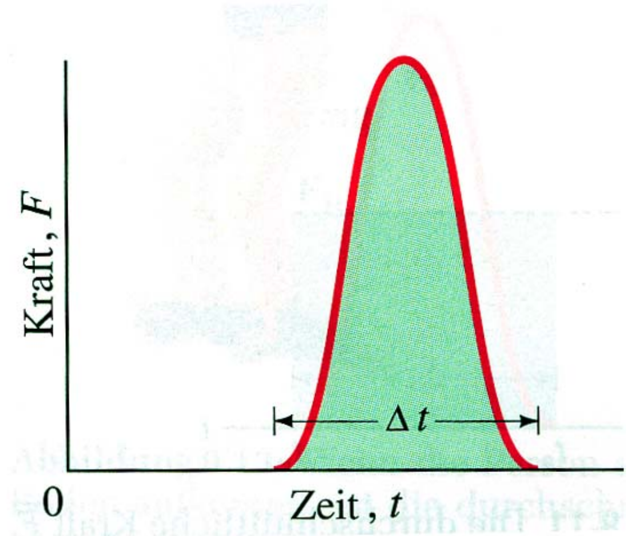
Kraftstoß, Impuls

Das Produkt aus Kraft $\vec{F}$ und Zeit *t* nennt man Kraftstoß (bei Einwirkung auf einen Körper).

Die Kraft $\vec{F}$ kann sich während der (kurzzeitigen) Einwirkung ändern, die Funktion *F(t)* kann beliebig sein:

Der Kraftstoß ist das Integral

$$\boxed{\int \vec{F} dt}$$



über das Zeitintervall, in dem die Kraft wirkt:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot a \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \frac{dv}{dt} dt = \int_{t_1,(v_1)}^{t_2,(v_2)} m \cdot dv = m \cdot v \Big|_{t_1,(v_1)}^{t_2,(v_2)} = m(v_2 - v_1)$$

Bei Beschleunigung aus der Ruhe: $v_1 = 0 \Rightarrow \quad \int \vec{F} dt = m \cdot v$

Das Produkt $m \cdot \vec{v}$ nennt man Impuls $\vec{p}$

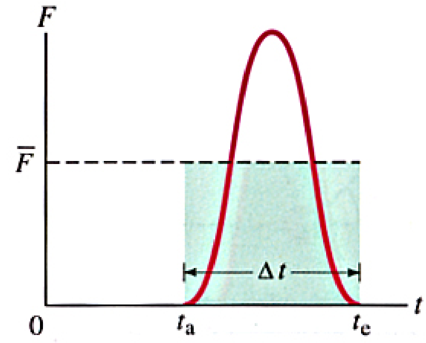
Der Impuls ist also der Kraftstoß, der den gestoßenen Körper aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ bringt.
Die Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ kann mit Hilfe von $\vec{p}$ geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \int \vec{F} dt = \vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(2. Newtonsches Axiom)}$$

Dimension des Impulses: $m \cdot l \cdot t^{-1}$
Einheit: $kg \cdot m \cdot s^{-1}$ *oder* $N \cdot s$

Die durchschnittliche Kraft $\overline{F}$ ist diejenige konstante Kraft, die, wenn sie während desselben Zeitintervalls $\Delta t = t_e - t_a$ wie die tatsächliche Kraft wirken würde, denselben Kraftstoß und dieselbe Impulsänderung bewirken würde :

$$\overline{F} \cdot \Delta t = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \cdot dt$$



Die durchschnittliche Kraft $\overline{F}$ über Δt liefert denselben Kraftstoß $\overline{F}\Delta t$ wie die tatsächliche Kraft.

Zusammengefasst erhalten wir:

$$\int_{a}^{e} d\vec{p} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_a = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \cdot dt = \overline{F} \cdot \Delta t$$

Beispiel: Eine Person mit der Masse m = 70 kg springt aus einer Höhe von 3,0 m auf einen festen Untergrund.

a) Berechnen Sie den Kraftstoß.

b) Schätzen Sie die vom Boden auf die Füße der Person ausgeübte Kraft ab, wenn die Landung mit durchgedrückten Knien bzw. mit gebeugten Knien erfolgt.

Ann.: im ersten Fall bewegt sich der Körper während des Aufpralls um 1 cm, im zweiten Fall um 50 cm.

Da wir die Kraft F nicht kennen, können wir den Kraftstoß $\overline{F} \cdot \Delta t = \int \vec{F} dt$ nicht direkt berechnen.

Wir benutzen die Tatsache, dass der Kraftstoß gleich der Änderung des Impulses ist.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit direkt vor dem Auftreffen benutzen wir den Energiesatz:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 - 0 = m \cdot g(y - y_o)$$

Dabei gilt: $v_o = 0$, $y_o = 3{,}0$ m, $y = 0$.

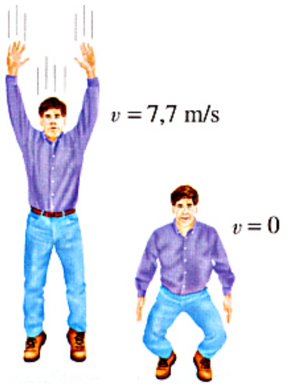
Daraus berechnen wir die Geschwindigkeit der Person unmittelbar vor dem Auftreffen auf dem Boden (freier Fall aus 3 m Höhe):

$$v = \sqrt{2g(y_o - y)} = \sqrt{2(9{,}8\, m/s^2)(3{,}0m)} = 7{,}7\, m/s$$

Beim Aufkommen auf dem Boden ist der Kraftstoß

$$\vec{F}\Delta t = \overline{F} \cdot \Delta t = \Delta p = p_e - p_a = 0 - (70kg)(7{,}7\, m/s) = -540 N \cdot s$$

Die Kraft wirkt nach oben, d.h. die Kraft ist dem ursprünglichen Impuls entgegen gerichtet.



Während des Aufpralls bremst der Körper auf dem Weg von

$s = 1{,}0\,cm = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,m$ von 7,7 m/s auf null ab. Die durchschnittliche Geschwindigkeit während dieses Zeitraums beträgt:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(7{,}7\,m/s - 0\,m/s) = 3{,}8\,m/s$$

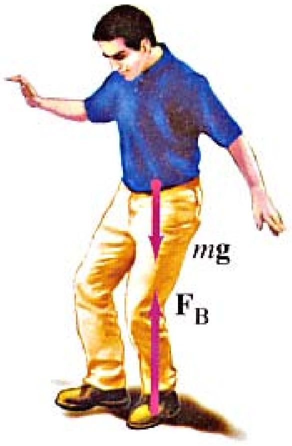
Somit dauert der Stoß

$$\Delta t = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-2}\,m}{3{,}8\,m/s} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\,s$$

Damit und mit dem Betrag des Kraftstoßes (= 540 N s) erhalten wir den Betrag der durchschnittlichen Kraft (Nettokraft) des Stoßes:

$$\overline{F} = \frac{F \cdot t}{\Delta t} = \frac{540\,N \cdot s}{2{,}6 \cdot 10^{-3}\,s} = 2{,}1 \cdot 10^{5}\,N$$

Diese Kraft ist die Summe aus der vom Boden auf die Beine ausgeübten (positiven) Kraft F_B und der nach unten gerichteten Gravitationskraft *–mg.*



$$\overline{F} = F_B - mg$$

Mit $mg = 70kg \cdot 9{,}81 m/s^2 = 690\,N$

erhalten wir:

$$F_B = \overline{F} + mg = 2{,}1 \cdot 10^5\,N + 0{,}690 \cdot 10^3\,N \approx 2{,}1 \cdot 10^5\,N$$

Betrachten wir nun den Fall der „Landung“ mit gebeugten Knien.

Jetzt ist s = *0,5 m* und wir erhalten für *Δt*: $\Delta t = \frac{0{,}5m}{3{,}8\,m/s} = 0{,}13s$

Damit ergibt sich für die vom Boden auf die Füße ausgeübte Kraft F_B :

$$F_B = \overline{F} + mg = 4{,}2 \cdot 10^3\,N + 0{,}690 \cdot 10^3\,N \approx 4{,}9 \cdot 10^3\,N$$

Die Kraft von $2{,}1 \cdot 10^5\,N$ übertrifft die Festigkeit von Beinknochen, die Kraft von $4{,}9 \cdot 10^3\,N$ liegt darunter.

Impulserhaltung

Wir betrachten einen Körper, der aus *n* Massenpunkten m_i besteht. Auf alle m_i sollen Kräfte wirken, so dass für jedes m_i die Bewegungsgleichung

$$F_i = \frac{d}{dt} P_i = \frac{d}{dt}(m_i \cdot v_i)$$

gelten soll. Für den Gesamtkörper mit der Masse *m* gilt dann:

$$\sum F_i = \frac{d}{dt} \sum p_i$$

$\sum F_i$: im Schwerpunkt angreifende resultierende Kraft F

$\sum p_i$: der Schwerpunktsbewegung zugeordneter resultierender Impuls p

Dann erhalten wir

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Da in einem freien System *F=0* gilt, erhalten wir: $\frac{dp}{dt} = 0$ =>

p =const. Impulserhaltungssatz

z.B. gilt für zwei in Ruhe befindliche Wagen, die von einer zusammengedrückten Feder in Bewegung gesetzt werden:

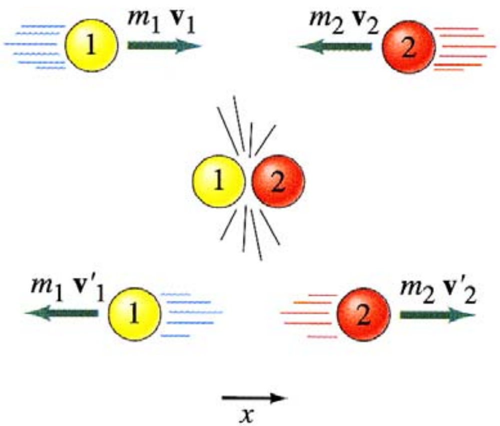
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = 0$$

Für einen Stoß gilt:

Impuls vorher = Impuls nachher

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$



Beim Stoß zwischen zwei Kugeln bleibt der Impuls erhalten.

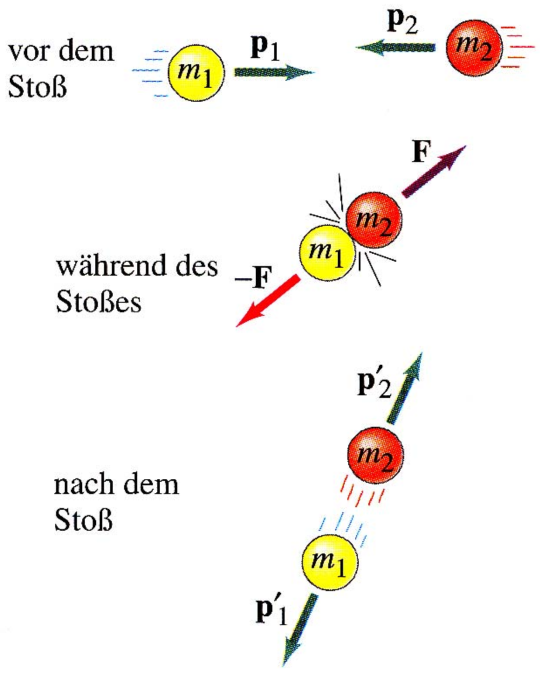
Wir betrachten zwei identische Kugeln mit den Massen m_1 und m_2, die vor dem Stoß den Impuls $\boldsymbol{p_1}$ bzw. $\boldsymbol{p_2}$ haben und nach dem Stoß den Impuls $\boldsymbol{p'_1}$ bzw. $\boldsymbol{p'_2}$. Die vom Körper 1 während des Stoßes auf den Körper 2 ausgeübte Kraft ist zu jeder Zeit $\boldsymbol{F}$.

Nach dem dritten Newtonschen Axiom ist die vom Körper 2 auf den Körper 1 ausgeübte Kraft $-\boldsymbol{F}$.

Aus $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ erhalten wir $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$

Wir integrieren über das kurze Zeitintervall des Stoßes von t_a bis t_e:

$$\int_{t_a}^{t_e} d\vec{p} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \cdot dt$$



Stoß zwischen zwei Körpern. Vor dem Stoß sind ihre Impulse $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$, danach $\mathbf{p}'_1$ und $\mathbf{p}'_2$. Zu jedem Zeitpunkt während des Stoßes übt jeder Körper auf den anderen eine Kraft mit demselben Betrag, aber entgegengesetzter Richtung aus.

Anwendung auf Körper 2 (Kraft ***F***): $\Delta p_2 = p_2' - p_2 = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \cdot dt$

Auf den Körper 1 wirkt die Kraft ***–F***: $\Delta p_1 = p_1' - p_1 = -\int_{t_a}^{t_e} \vec{F} \cdot dt$

Der Vergleich beider Gleichungen zeigt, dass

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \qquad \rightarrow \qquad p_1' - p_1 = -\left(p_2' - p_2\right)$$

Durch Umstallung erhalten wir:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

Das ist der Impulserhaltungssatz

Wir betrachten noch einmal die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int \vec{F}dt = \vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\cdot\vec{v}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ 2. Newtonsches Axiom

Hier ist vorausgesetzt, dass die Masse m konstant ist. Nach Einstein nimmt jedoch die Masse eines12s mit der Geschwindigkeit zu. m hat dann den Wert:

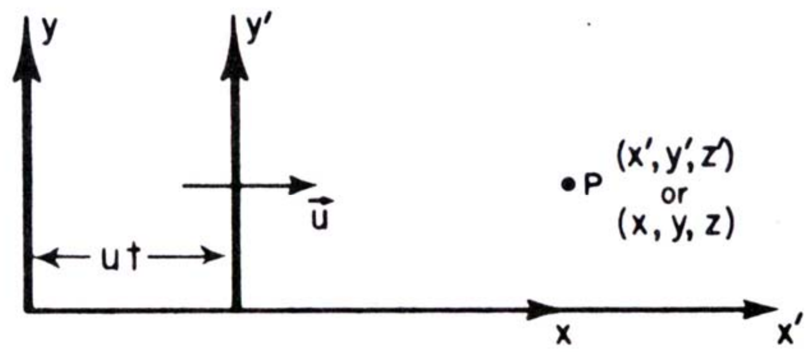
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

wobei m_o die Ruhemasse und $c = 3\cdot 10^5\ km/s$ die Lichtgeschwindigkeit ist.
Dieser Korrekturfaktor zur Masse ändert die Newtonschen Gesetze soweit, um relativistisch rechnen zu können.
In der Praxis sind die meisten Geschwindigkeiten zu klein, um wesentliche Abweichungen von den Newtonschen Gesetzen zu bewirken

Bei allen Experimenten, die innerhalb eines bewegten Systems ausgeführt werden, sind die Gesetze der Physik die gleichen wie in ruhenden Systemen.

Newton: „Die Bewegung von Körpern in einem gegebenen Raum sind untereinander die gleichen, ob sich der Raum in Ruhe befindet oder ob er sich konstant auf einer geraden Linie bewegt.“ (Relativitätsprinzip)

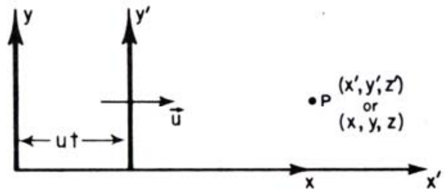
Wir betrachten zwei Koordinatensysteme in gleichförmiger relativer Bewegung entlang ihrer x-Achse:



Wir betrachten einen Punkt P in beiden Koordinatensystemen.
Zur Zeit t=0 seien die beiden Koordinatensysteme deckungsgleich.
Nach der Zeit t hat sich P im gestrichenen System um den Abstand ut bewegt. Wir erhalten:

Galilei-Transformation:

$$x' = x - ut$$
$$y'' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$



Setzen wir diese Koordinatentransformation in die Newtonschen Gesetze ein, dann finden wir, dass diese Gesetze invariant bezüglich der Transformation sind.
Es ist daher unmöglich, durch mechanische Gesetze zu bestimmen, ob sich ein System bewegt oder nicht.

Anwendung der Transformation auf die Maxwellschen Gleichungen: die Form der Gleichungen bleibt nicht die gleiche!

Maxwell: Licht einer Lichtquelle breitet sich in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit c aus, unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle.

Man nahm an, damit Geschwindigkeiten messen zu können.

Beispiel: Wagen mit der Geschw. *u*, Licht überholt den Wagen von hinten.

Die Differentiation von $x' = x - ut$ liefert $\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - u$

Die effektive Geschwindigkeit sollte also $c - u$ und nicht c sein.

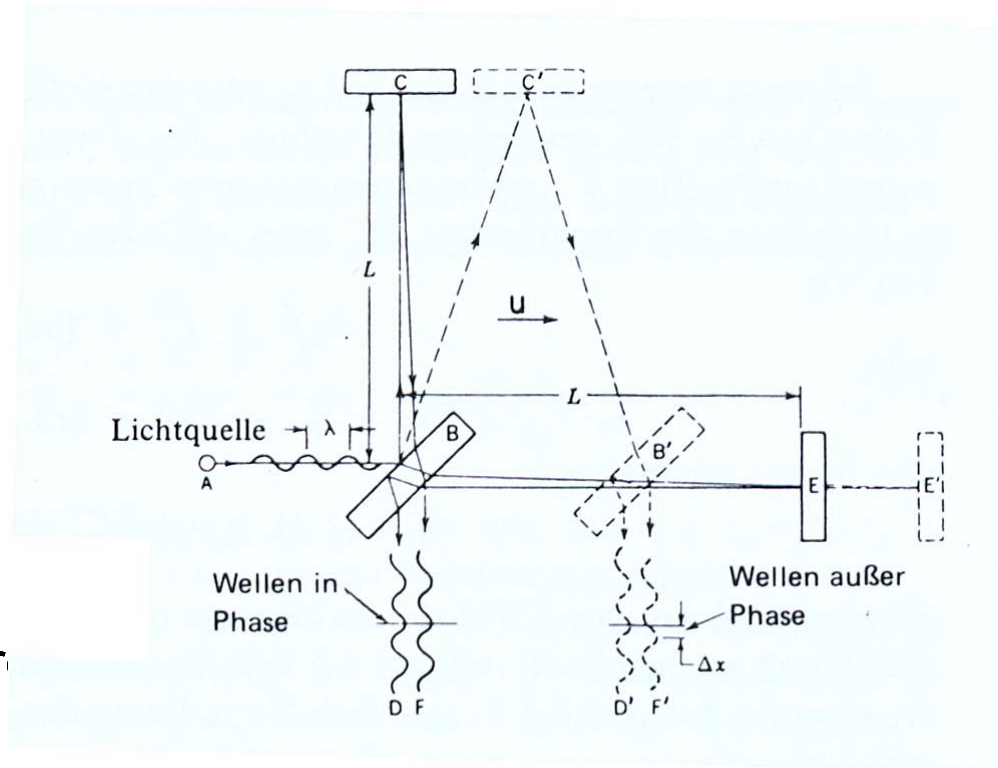
Annahme: $v_w = 200\,000\ km/s$, $c = 300\,000\ km/s$, dann sollte die Differenzgeschwindigkeit $v_{diff} = 100\,000\ km/s$ sein. Die Messung der Lichtgeschwindigkeit sollte also die Bestimmung der Geschwindigkeit des Wagens ermöglichen.

Dies ist in keinem Fall gemessen worden.

Das Michelson-Morley-Experiment

Das Experiment war gedacht zur Bestimmung der absoluten Geschwindigkeit der Erde durch den „Äther“.

B teilt den Strahl von *A* in zwei Strahlen, die zu *C* und *E* laufen. Nach dem Rücklauf werden die Strahlen überlagert und interferieren (*D* und *F*). Wenn trotz gleicher Längen *L* die die Strahlen nicht in Phase sind, dann sollte eine Zeitdifferenz auftreten.



A: Lichtquelle

B: Halbdurchlässiger Spiegel

C,E: Spiegel

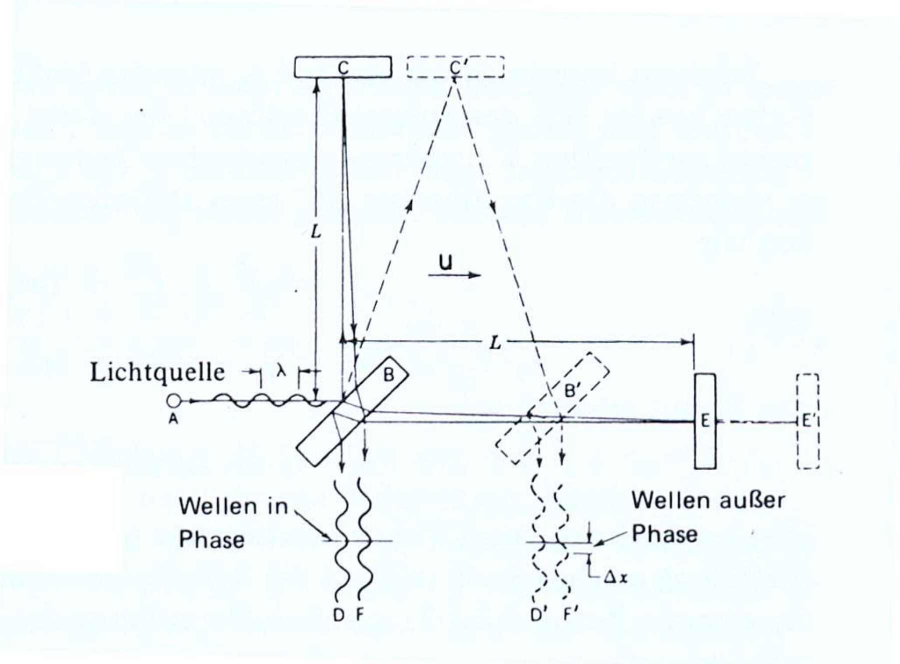
L: Gleicher Abstand von B nach C und von B nach E

Sei die Zeit von *B* zum Spiegel *E* gleich t_1, die Zeit der Rückkehr zu *B* gleich t_2. Bewegt sich die Anordnung mit der Geschwindigkeit *u* nach „rechts", d.h. in der Zeit t_1 um die Strecke ut_1, dann legt das Licht von *B* nach *E* also die Strecke $L + u\,t_1$ mit der Geschw. *c* zurück, d. h.

$$L + ut_1 = c \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L}{c-u}$$

t_2 erhalten wir aus dem Rückweg $L - u\,t_2$, den das Licht mit der Geschwindigkeit c zurücklegt:

$$L - ut_2 = c \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L}{c+u}$$

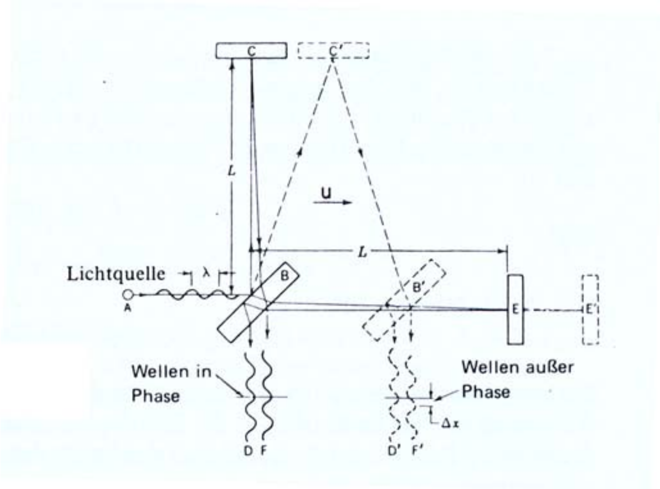


Für die gesamte Zeit erhalten wir also:

$$t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 + u^2} = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2}$$

Der Spiegel *C* bewegt sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit *u*. Die Zeit t_3, die der Lichtstrahl braucht, um von *B* zu *C* (*C* bewegt sich in der Zeit t_3 die Strecke ut_3 zur Position *C´*)zu gelangen, berechnen wir daher aus dem in der Abbildung gezeigten rechtwinkligen Dreieck.

Wir sehen, dass $BC' = ct_3$:



$$\left(ct_3\right)^2 = L^2 + \left(ut_3\right)^2$$

$$L^2 = c^2 t_3^2 - u^2 t_3^2 = \left(c^2 - u^2\right) t_3^2$$

Daraus erhalten wir

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

Da die Strecke des Rückwegs die gleiche wie die des Hinwegs ist, ergibt sich

$$2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Der Vergleich von t_1 und t_3 zeigt eine Änderung im Nenner.
Vorschlag von Lorentz: Längenkontraktion bewegter Körper:

$$L_{II} = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Dadurch ändert sich die Entfernung von *B* nach *C* nicht, wohl aber die von *B* nach *E*. Wir erhalten

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/c\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u^2/c^2} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Jetzt ist

$$t_1 + t_2 = 2 \cdot t_3$$

Das Michelson-Morley-Experiment bringt also keine Lösung zur Messung des „Ätherwindes“

Lorentz-Transformation:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Die Anwendung auf die Newtonschen Gesetze zeigt, dass nur die Masse durch die Gleichung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ersetzt werden muss. Die Form der Gleichungen ist dann in allen Koordinatensystemen gleich.

Längenkontraktion

Wir betrachten einen Körper der Länge L_0, der sich auf der x-Achse des Koordinatensystems *S* in Ruhe befindet. Die Endpunkte des Körpers seien x_1 und x_2, so dass $L_0 = x_2 - x_1$. Im gestrichenen Koordinatensystem S‘ gelten die Koordinaten x'_1 und x'_2 und damit $L = x'_2 - x'_1$
Ein Beobachter im System S‘ bestimmt diese Länge, indem er x'_2 und x'_1 gleichzeitig misst, damit gilt: $t'_2 = t'_1$.
Wir benutzen nun die erste Gleichung der Lorentz-Transformationen für das ungestrichene System:

$$L_0 = x_2 - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(x'_2 + ut'_2 - x'_1 - ut'_1\right)$$

Wegen $t'_2 = t'_1$ erhalten wir

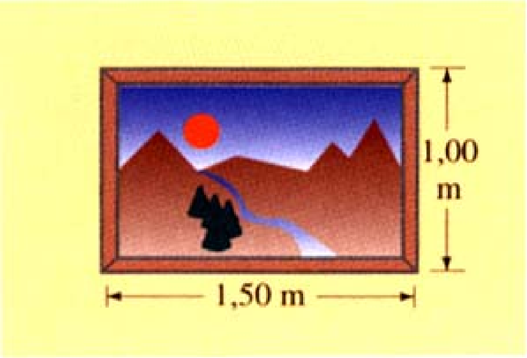
$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(x'_2 - x'_1\right) = \frac{L}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

Beispiel: Längenkontraktion eines rechteckigen Gemäldes

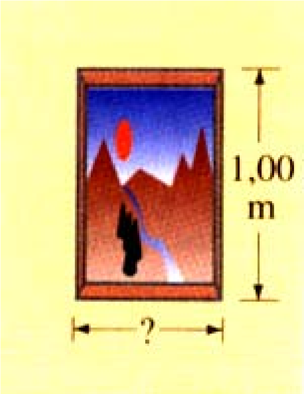
Ein Gemälde ist 1,0 m hoch und 1,50 m breit. Es hängt an der Seitenwand eines Raumschiffs, das mit einer Geschwindigkeit von 0,9 c an der Erde vorbei fliegt. Welche Abmessungen hat das Gemälde im Raumschiff und von der Erde aus gesehen?

Im Raumschiff erscheint das Gemälde ganz normal



Von der Erde aus beobachtet verkürzt sich die Abmessung in Bewegungsrichtung auf

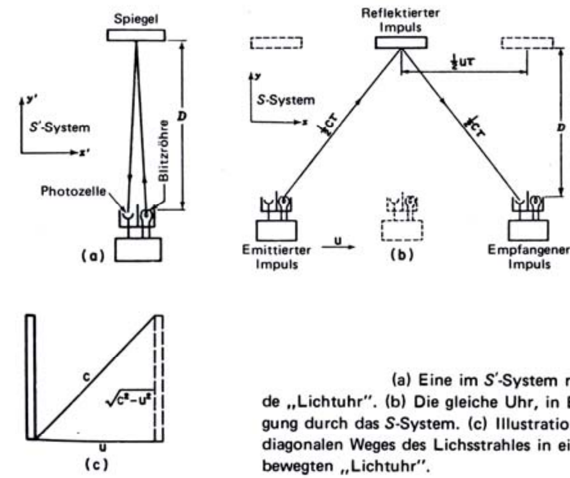
$$L = L_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = (1{,}5m)\sqrt{1-(0{,}9)^2} = 0{,}65m$$



Das Gemälde hat von der Erde aus gesehen die Abmessungen 1,0 m x 0,65m

Zeitdilatation

Zeit in einem bewegten Koordinatensystem relativ zu einem ruhenden Beobachter:



(a) Eine im S'-System ruhende „Lichtuhr". (b) Die gleiche Uhr, in Bewegung durch das S-System. (c) Illustration des diagonalen Weges des Lichsstrahles in einer bewegten „Lichtuhr".

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

D.h., die beobachtete Zeit in einem bewegten System ist für einen ruhenden Beobachter langsamer.

Beispiel: die Zeit t_3 des Lichts von Spiegel B zum Spiegel C ist in einem bewegten System (gestrichenes System) 2 L/c, für einen ruhenden Beobachter (ungestrichenes System) jedoch

$$2t_3 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Für jede Zeitdifferenz im bewegten System gilt daher für den ruhenden Beobachter:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Beispiel 1: **Lebenszeit eines bewegten Myons**

Ein Myon bewege sich mit der Geschwindigkeit $u = 0{,}6c = 1{,}8 \cdot 10^8\, m/s$ in Bezug auf das Labor bewegt. In Ruhe beträgt seine mittlere Lebensdauer $2{,}2 \cdot 10^{-6}\, s$ a) Wie groß ist die im Labor gemessene mittlere Lebensdauer? b) Welche Entfernung legt das Myon im Mittel zurück, bevor es zerfällt?

a) Für einen mitbewegten Beobachter hat das Myon eine mittlere Lebensdauer von $2{,}2 \cdot 10^{-6}\, s$. Für einen Beobachter im Labor ergibt sich mit $u = 0{,}6\, c$:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}\, s}{\sqrt{1 - \frac{0{,}36 \cdot c^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}\, s}{\sqrt{0{,}64}} = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\, s$$

b) Wegstrecke ohne Zeitdilatation (klassische Physik):

$$d = u \cdot t = (1{,}8 \cdot 10^{8}\, m/s)(2{,}2 \cdot 10^{-6}\, s) = 400m$$

Wegstrecke mit Zeitdilatation (Relativitätstheorie):

$$d = u \cdot t' = (1{,}8 \cdot 10^{8}\, m/s)(2{,}8 \cdot 10^{-6}\, s) = 500m$$

Im Experiment wird die längere Wegstrecke gemessen

Beispiel 2: Zeitdilatation bei 100 km/h

Ein Auto, das mit 100 km/h fährt, legt eine bestimmte Entfernung in 10 s zurück, gemessen mit der Uhr des Fahrers. Welches Zeitintervall misst ein Beobachter am Straßenrand?

Die Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Beobachter beträgt $100\,km/h = 1{,}0 \cdot 10^{5}\,m \cdot 3600\,s = 27{,}8\,m/s$. Mit $\Delta t_0 = 10s$ erhalten wir:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{10s}{\sqrt{1-\left(\dfrac{27{,}8\,m/s}{3{,}0 \cdot 10^{8}\,m/s}\right)^2}} = \frac{10s}{\sqrt{1-8{,}59 \cdot 10^{-15}}}$$

Wir benutzen

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$$ für $n \angle\angle 1$ (Binomialentwicklung)

Wir wenden diese Entwicklung auf den Ausdruck $\left(1-u^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ an:

$$\Delta t = \Delta t_0\left(1-u^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \Delta t_0\left(1-\frac{1}{2}(u^2/c^2)\right)$$

$$\approx 10{,}0s\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{27{,}8\,m/s}{3{,}0\cdot 10^8\,m/s}\right)^2\right] \approx 10{,}0s + 4\cdot 10^{-15}\,s$$

Die Differenz zwischen Δt und Δt_0 beträgt somit

$$\Delta t_0 - \Delta t = 4\cdot 10^{-15}\,s$$

Drehimpuls

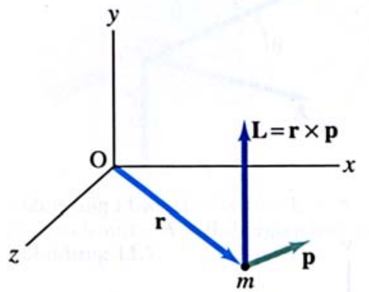
a) Drehimpuls eines Massenpunktes

Wir erinnern uns an das zweite Newtonsche Axiom für die Translationsbewegung eines Massenpunktes:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Das Analogon des Impulses für die Drehbewegung ist der Drehimpuls.
So wie die Änderung des Impulses von der Kraft F abhängt, hängt die Änderung des Drehimpulses vom Drehmoment ab.
Sei $\vec{p}$ der Impuls und $\vec{r}$ der Portsvektor eines Massenpunktes mit der Masse *m* in einem Inertialsystem.
Dann ist die allgemeine Definition des Drehimpulses $\vec{L}$ um den Punkt 0 das Vektorprodukt aus $\vec{r}$ und $\vec{p}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Der Drehimpuls eines Massenpunktes mit der Masse *m* ist gegeben durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

Der Betrag des Vektors $\vec{L}$ ist $L = r \cdot p \cdot \sin\theta$

Die Ableitung von $\vec{L}$ nach der Zeit ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Andererseits erhalten wir

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \div \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = m\left(\vec{v} \times \vec{v}\right) = 0$$ da $\sin\theta = 0$

Somit gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Sei $\vec{F}$ die auf den Massenpunkt wirkende resultierende Kraft, dann gilt in einem Inertialsystem $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ und wir erhalten:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Da $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ das auf den Massenpunkt wirkende Drehmoment ist, erhalten wir

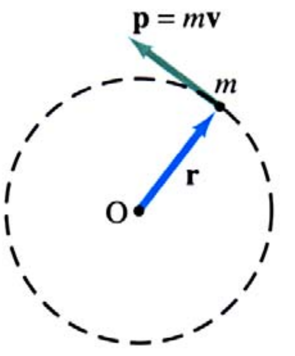
$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines Massenpunktes ist gleich dem auf ihn ausgeübten Drehmoment.

Beispiel: Drehimpuls eines Massenpunktes mit der Masse *m*, der sich mit der Geschwindigkeit *v* auf einer Kreisbahn mit dem Radius *r* gegen den Urzeigersinn bewegt.

Wir berechnen *L* in Bezug auf den Kreismittelpunkt. $\vec{r}$ steht senkrecht zu $\vec{p}$:

$$L = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = r \cdot m \cdot v$$



Der Drehimpuls eines Massenpunktes mit der Masse *m*, der sich mi der Geschwindigkeit **v** auf einer Kreisbahn mit dem Radius **r** bewegt, ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ (Beispiel 11.2).

$\vec{L}$ steht senkrecht auf der Kreisebene und zum Betrachter hin.

Für den Massenpunkt gilt: $v = \omega \cdot r$

und $J = m \cdot r^2$

=>

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega = J \cdot \omega$$

b) Beziehung zwischen Drehimpuls und Drehmoment

Wir betrachten ein System von n Massenpunkten mit den Drehimpulsen $\vec{L}_1, \vec{L}_2, ..., \vec{L}_n$. Der Gesamtdrehimpuls ist dann:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Das auf das System wirkende resultierende Drehmoment ist die Summe aller auf alle Massenpunkte wirkenden Einzeldrehmomente:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

Da sich die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten herausheben (drittes Newtonsches Axiom), ist das Gesamtdrehmoment die Summe aller externen Drehmomente:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum M_{ext}$$

Die Ableitung nach der Zeit liefert uns $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{ji} \frac{d\vec{L}_j}{dt} = \sum M_{ext}$$

Allgemein ist dies das zweite Newtonsche Axiom :

$$* \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum M$$ (Inertialsystem)

Die zeitliche Änderung eines Systems von Massenpunkten (bzw. eines starren Körpers) ist gleich dem auf das System wirkenden <u>äußeren</u> Drehmoment.

Es ist das Analogon zu der für die Translationsbewegung gültigen Gleichung

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum F_{ext}$$

Gl.($*$) ist gültig, wenn sie a) in einem Inertialsystem in Bezug auf einen festen Punkt berechnet wird und b) wenn M und L um einen Punkt berechnet werden, der sich <u>gleichförmig</u> bewegt

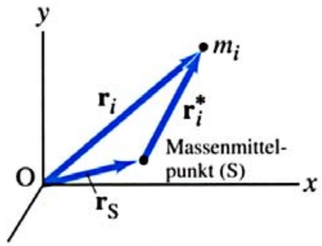
Die Gleichung ist nicht gültig, wenn L und M um einen beschleunigten Punkt berechnet werden, ausgenommen den Massenmittelpunkt.

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum M_S$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, dass die allgemeine Bewegung eines Systems von Massenpunkten (fester Körper) als Translationsbewegung des Massenmittelpunktes und als Rotationsbewegung um den Massenmittelpunkt beschrieben werden kann.

Wir betrachten den i-ten Massenpunkt in einem Inertialsystem mit dem Ortsvektor r_i . S sei der Massenmittelpinkt des Systems mit dem Ortsvektor r_S . Der Vektor des Massenpunktes in Bezug auf den Massenmittelpunkt ist r_i^*
Dann ist

$$\vec{r}_i = \vec{r}_S + \vec{r}_i^{\,*}$$



Der Ort von m_i in dem Inertialsystem ist $\mathbf{r}_i$. In Bezug auf den Massenmittelpunkt (S) (der möglicherweise beschleunigt) ist er $\mathbf{r}_i^*$. Dabei ist $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_S$ und $\mathbf{r}_S$ der Ort des Massenmittelpunktes in dem Inertialsystem.

Ableitung und Multiplikation mit m liefert

$$\vec{p}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i^{\,*} + \vec{r}_S\right) = \vec{p}_i^{\,*} + m_i \vec{v}_S$$

Der Drehimpuls in Bezug auf den Massenmittelpunkt beträgt

$$\vec{L}_S = \sum_i \left(\vec{r}_i^{\,*} \times \vec{p}_i^{\,*}\right) = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \left(\vec{p}_i - m_i \vec{v}_S\right)$$

Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i^{\,*}}{dt} \times \vec{p}_i^{\,*}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i^{\,*} \times \frac{d\overleftarrow{p}_i^{\,*}}{dt}\right)$$

Der erste Term ist Null ($\vec{v}_i^{\,*} \times m\vec{v}_i^{\,*} = 0$), weil $\vec{v}_i^{\,*}$ zu sich selbst parallel ist. Wir erhalten:

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_i - m_i \vec{v}_S\right) = \sum_i \vec{r}_i^{\,*} \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} - \left(\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,*}\right) \times \frac{d\vec{v}_S}{dt}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist Null, da laut Definition $\vec{r}_S^{\,*} = 0$
Ursprung des Bezugssystems des Massenmittelpunktes).
Außerdem benutzen wir

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

Wir erhalten damit:

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \sum \vec{r}_i^{\,*} \times \vec{F}_i = \sum M_{i_S} = \sum M_S$$

Wir berechnen die Komponente des Drehimpulses entlang der Drehachse eines starren, rotierenden Körpers

Winkelgeschwindigkeit ω verläuft entlang der Drehachse

Komponente L_ω zeigt in diese Richtung

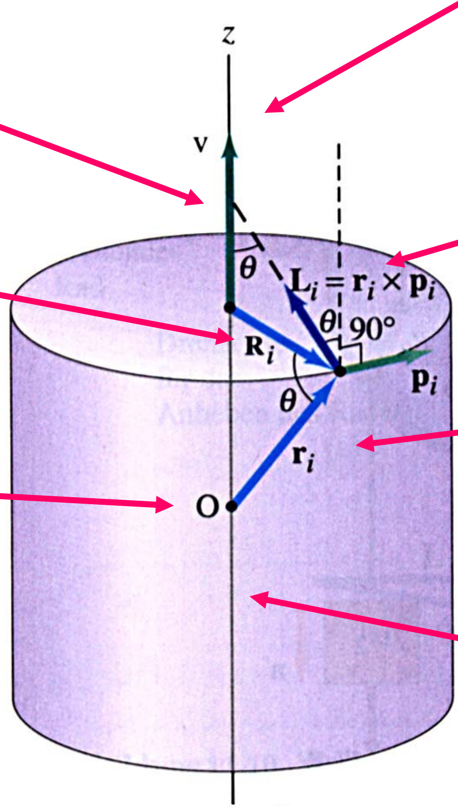
Drehimpuls des Massenpunktes

Radius des Körpers (senkrechter Abstand von m_i zur Drehachse)

Ortsvektor des Massenpunktes

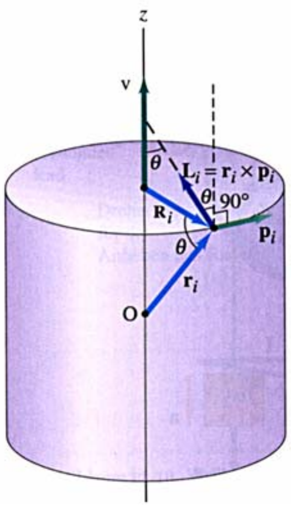
Massenmittelpunkt Ursprung des Inertial-systems

Drehachse mit fester Raum-richtung, geht durch den Schwerpunkt



Wir berechnen die Komponente L_ω des Drehimpulses entlang der Drehachse

Für jeden Massenpunkt m_i gilt: $$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Die Komponente von L_i entlang der Drehachse ist

$$L_{i\omega} = r_i \cdot p_i \cdot \cos\theta = m_i \cdot v_i \cdot r_i \cdot \cos\theta$$

(v_i = Geschwindigkeit des i-ten Massenpunktes)

Da $v_i = R_i \cdot \omega$ und $R_i = r_i \cdot \cos\theta$ erhalten wir:

$$L_{i\omega} = m_i \cdot v_i \cdot (r_i \cdot \cos\theta) = m_i \cdot R_i^2 \cdot \omega$$

Summe über alle Massenpunkte:

$$L_\omega = \sum_i L_{i\omega} = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \cdot \omega$$

$\sum_i m_i R_i^2$ ist das Trägheitsmoment das Trägheitsmoment J des Körpers um die Drehachse. Also gilt:

$$L_\omega = J \cdot \omega$$

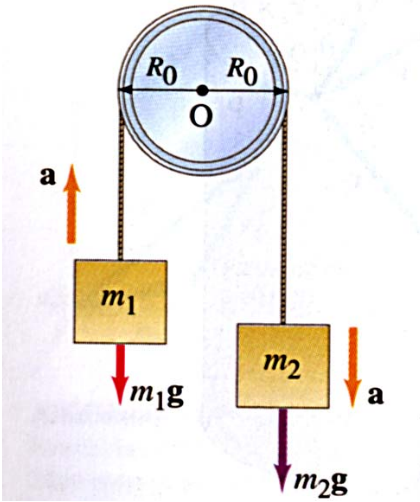
Da sich die lateralen Komponenten von L herausheben, ist L_ω die einzige Komponente von L und wir erhalten insgesamt für eine symmetrische Drehachse, die durch den Massenmittelpunkt verläuft:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{J} \cdot \omega}$$

Für die Komponente des Drehmoments entlang der Drehachse können wir schreiben:

$$M_{Drehachse} = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = J\frac{d\omega}{dt} = J \cdot \alpha$$

Beispiel 1: Wir betrachten eine Rolle mit zwei Gewichten. Wie groß ist die Beschleunigung der beiden Massen?



Die Drehachse verläuft entlang der Tragachse durch den Mittelpunkt 0 der Rolle. Das Trägheitsmoment der Rolle beträgt dann Jω, wobei ω = v/R_0 und v die Geschwindigkeit von m_1 und m_2 ist. Die Drehimpulse L_1, L_2 der beiden Massen betragen

m_1: $L_1 = m_1 \cdot v \cdot R_0$ m_2: $L_2 = m_2 \cdot v \cdot R_0$

Der Gesamtdrehimpuls ist damit

$$L = (m_1 + m_2) v \cdot R_0 + J \frac{v}{R_0}$$

Das auf das System wirkende Drehmoment ist

$$M = m_2 \cdot g \cdot R_0 - m_1 \cdot g \cdot R_0$$

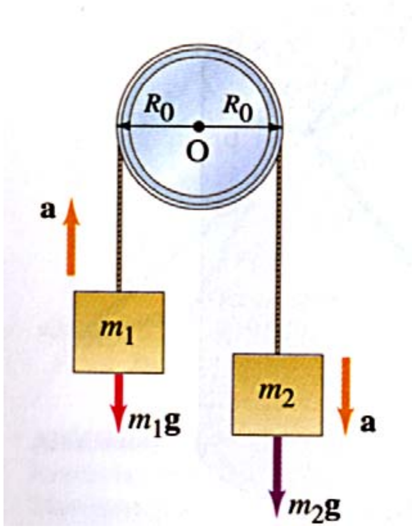
Wir benutzen die Gleichung $M = \frac{dL}{dt}$ und erhalten

$$(m_2 - m_1) \cdot g \cdot R_0 = (m_1 + m_2) \cdot R_0 \cdot \frac{dv}{dt} + J \cdot \frac{dv}{dt}$$

Auflösung nach $a = \frac{dv}{dt}$ ergibt

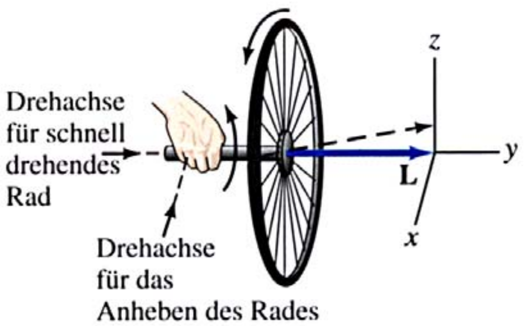
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{(m_1 + m_2) + J/R_0^2}$$

Das Trägheitsmoment der Rolle bewirkt, dass das System langsamer wird

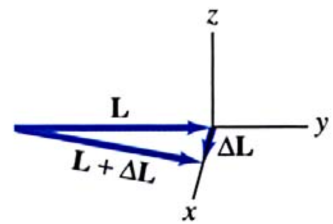


Beispiel 2: Ein Rad dreht sich schnell, so dass sein Drehimpuls in horizontaler Richtung verläuft. Wenn wir das Rad noch oben kippen (der Massenmittelpunkt bewegt sich dabei vertikal), dreht sich das Rad nach rechts. Warum?

Durch das Anheben des Rades (Drehung um eine Achse in x-Richtung) wird ein Drehmoment $\vec{M}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ während der Zeit *Δt* ausgeübt, das entlang der x-Achse senkrecht zu *L* verläuft. Die Änderung von *L* beträgt



$$\Delta\vec{L} = \vec{M}_{net}\Delta t$$



Da *ΔL* in Richtung der x-Achse verläuft, zeigt der neue Drehimpuls *L* + *ΔL* nach rechts. Damit muss sich auch die Drehachse nach rechts bewegen

Drehimpulserhaltung

Wir haben die Gesetze $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ und $\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ gefunden

Wenn bei einer Translationsbewegung die auf das System wirkende Gesamtkraft Null ist, gilt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Wenn bei einer Drehbewegung das Gesamtdrehmoment Null ist, gilt

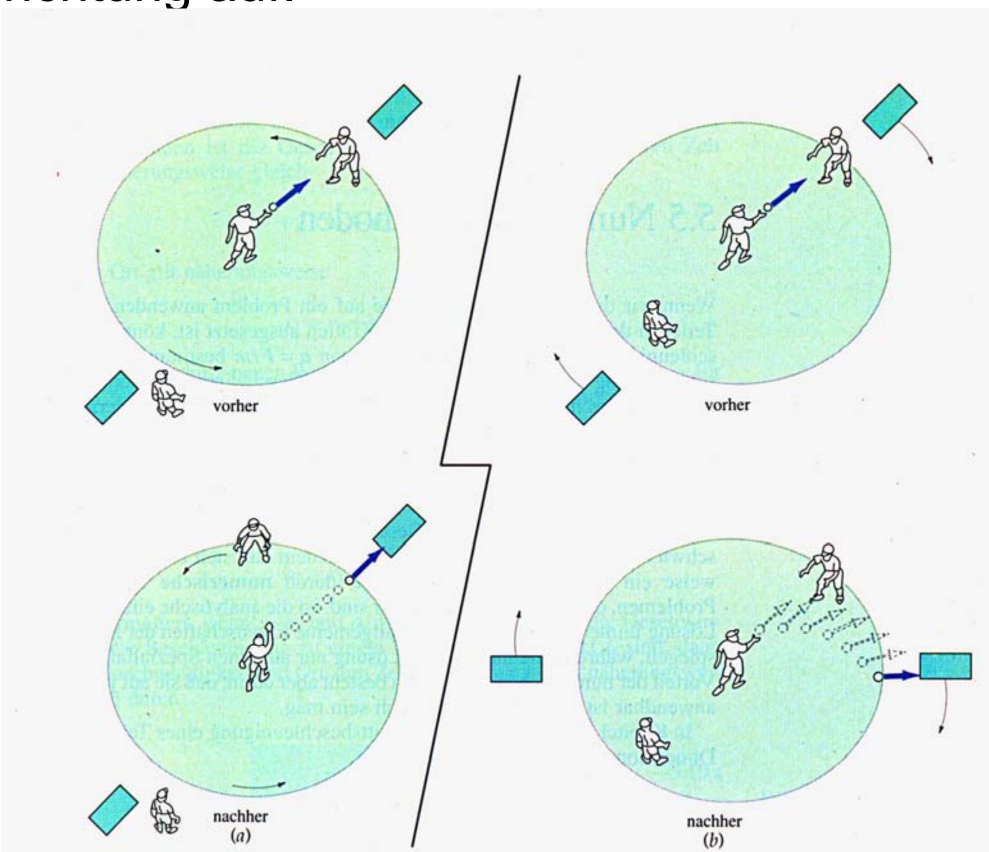
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = const} \qquad \left(\sum M = 0\right)$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems bleibt konstant, wenn das auf das System wirkende Gesamtdrehmoment gleich null ist (Drehimpulserhaltungssatz)

Scheinkräfte (Trägheitskräfte)

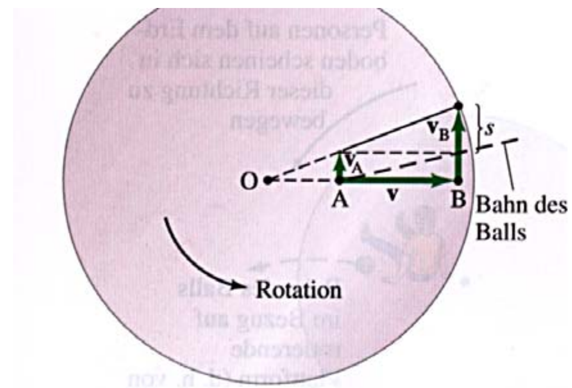
Scheinkräfte treten in einem rotierenden, nichtinertialen Bezugssystem auf

Die Corioliskraft tritt in einem rotierenden Bezugssystem auf, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die im rotierenden System auftretende „scheinbare“ Kraft tritt senkrecht zur Bewegungsrichtung auf.



Ein Junge steht in der Mitte einer rotierenden Scheibe und wirft seinem Freund am Rand der Scheibe einen Ball zu. a) In einem Inertialsystem bewegt sich der Ball geradlinig und verpaßt den zweiten Jungen, weil sich dieser mit der Scheibe weggedreht hat. b) Im Bezugssystem der rotierenden Scheibe ist der zweite Junge in Ruhe, und der Ball wird nach rechts abgelenkt. Die Scheinkraft, die den Ball von seiner geradlinigen Bahn abbringt, heißt Corioliskraft.

Die <u>Beschleunigung der Corioliskraft</u>, a_c, erhält man durch die Division der Scheinkraft durch die Masse des Körpers. Fügen wir dem zweiten Newtonsche Axiom $F = m\, a$, einen „Scheinterm“ hinzu, dann gilt dieses Axiom auch im nichtinertialen System.
Bewege sich ein Ball in dem nichtinertialen (rotierenden) System mit der Geschwindigkeit v einen Weg $r_B - r_A$ in der Zeit t radial nach außen.
Dann gilt: $$r_B - r_A = v \cdot t$$



Inertialsystem

Während dieser Zeit bewegt sich der Ball um den Weg s_A zur Seite

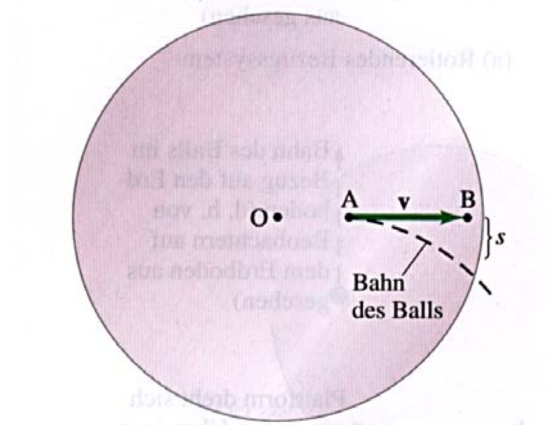
$$s_A = v_A \cdot t$$

Die Person in B bewegt sich während dieser Zeit um den Weg

$$s_B = v_B \cdot t$$

Der Ball bleibt also um den Weg s zurück

$$s = s_B - s_A = \left(v_B - v_A\right) \cdot t$$



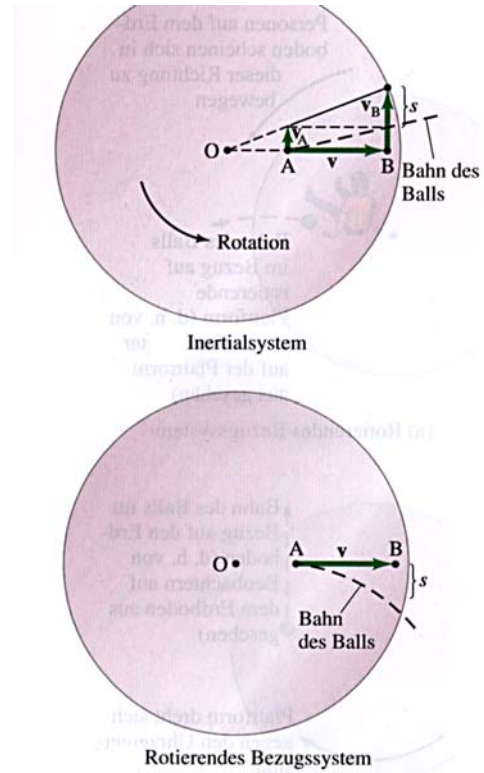
Rotierendes Bezugssystem

Wir benutzen die Beziehung $v = r \cdot \omega$:

$$v_A = r_A \cdot \omega \quad \text{und} \quad v_B = r_B \cdot \omega \qquad : \quad s = (r_B - r_A) \cdot \omega \cdot t$$

Wir ersetzen $r_B - r_A = v \cdot t$ und erhalten

$$s = v \cdot \omega \cdot t^2$$



Für eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung hatten wir gefunden:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot t^2$$

Durch Gleichsetzen und Auflösen nach a_c erhalten wir die Coriolisbeschleunigung:

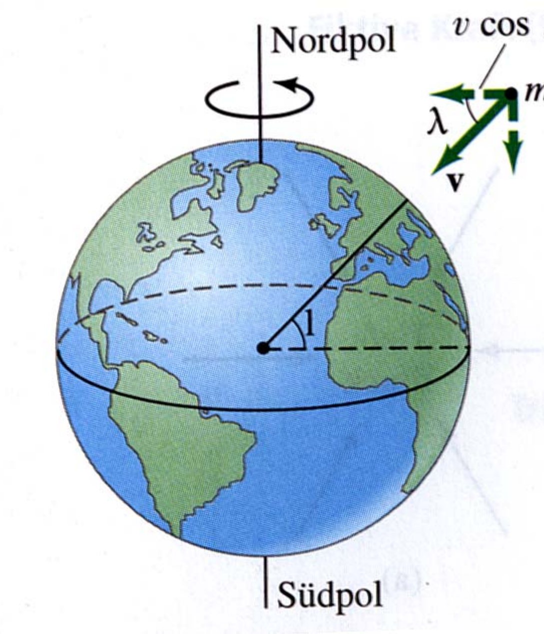
$$a_C = 2 \cdot \omega \cdot v$$

Die Corioliskraft wirkt auch bei fallenden Gegenständen auf die Erde.
Eine Geschwindigkeitskomponente parallel zur

Die Corioliskraft wirkt auch bei fallenden Gegenständen auf die Erde. Eine Geschwindigkeitskomponente parallel zur Drehachse erfährt keine Coriolisbeschleunigung, da *r* sich nicht ändert. Die Komponente von *v* senkrecht zur Drehachse (vertikal fallender Körper)

$$v_{senkrecht} = v \cdot \cos \lambda$$

erzeugt aber eine Coriolisbeschleunigung. λ ist der Breitengrad des Ortes auf der Erde.



Beispiel: Eine Kugel wird vertikal von einem 110m hohen Turm in Florenz (Breitengrad 44^0) fallen gelassen. Wie weit vom Fuß des Turms wird sie von der Corioliskraft abgelenkt?

Die Beschleunigung beträgt

$$a_C = 2 \cdot \omega \cdot v \cdot \lambda$$

v ist die vertikale Geschwindigkeit des freien Falls:

$$v = g \cdot t$$

Damit erhalten wir für a_C: $$a_C = (2 \cdot \omega \cdot g \cdot \cos\lambda) \cdot t = \frac{dv_s}{dt}$$

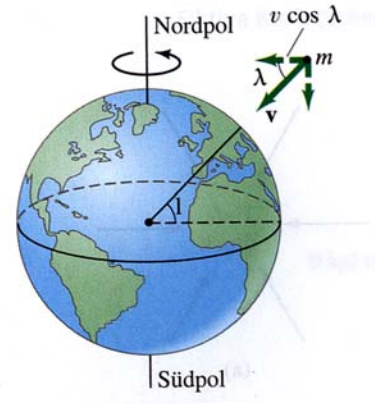
Den Weg senkrecht zum freien Fall (x-Richtung) erhalten wir durch zweimaliges integrieren:

$$\int_0^{v_s} dv_s = \int_0^t (2 \cdot \omega \cdot g \cdot \cos\lambda) \cdot t \cdot dt \quad \rightarrow \quad v_s = (\omega \cdot g \cdot \cos\lambda) \cdot t^2$$

$$s = \int_0^t v_s \, dt = \omega g \cos\lambda \int_0^t t^2 dt = \frac{1}{3} \omega g \cos\lambda \cdot t^3$$

t berechnen wir aus der Fallzeit von dem 110 m hohen Turm

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \left(2h/g\right)^{\frac{1}{2}}$$



Damit beträgt die Ablenkung:

$$s = \frac{1}{3} \omega \cdot g \cdot \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \omega \cos\lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

Mit $h = 110m$, $\lambda = 44^0$, und ω (Erdrotation, 1 Umdrehung in 24 h)

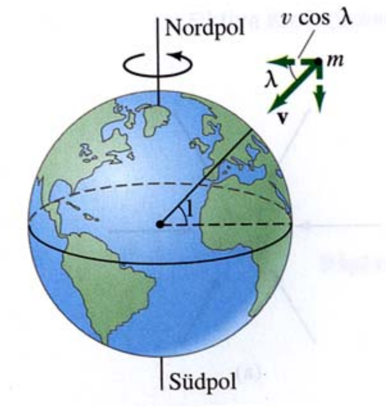
$$\omega = 2\pi \cdot n = (2\pi \cdot 1/24h) \cdot (3600\, s/h) = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\, rad/s$$

erhalten wir

$$s = \frac{1}{3}\left(7{,}27 \cdot 10^{-5}\, rad/s\right) \cdot \left(\cos 44^0\right) \sqrt{\frac{8(110m)^3}{9{,}8\, m/s^2}} = 0{,}018m$$

Die Kugel wird also während des Falls ca. 20 cm abgelenkt.

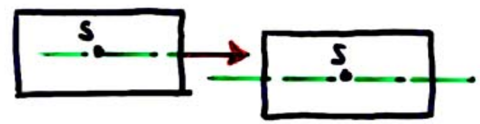
Die Richtung der Ablenkung erhalten wir aus der Überlegung, dass sich die Kugel beim Fallen näher zur Erdachse bewegt. D.h. die Spitze des Turms bewegt sich aufgrund der Erdrotation schneller als das untere Ende.
Daher wird die Kugel <u>nach Osten</u> abgelenkt.



Stoßgesetze

Man spricht von einem Stoß, wenn zwei Körper für kurze Zeit aufeinanderprallen und sich dann wieder trennen.

Wir unterscheiden den **zentralen Stoß** und den **dezentralen Stoß**.



Folge eines Stoßes: Änderung von Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der stoßenden Partner.

Ein Stoß heißt elastisch, wenn die Bewegungsrichtung der Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich ist, d.h. wenn die Verformungsenergie beim Stoß wieder vollständig in Bewegungsenergie verwandelt wird.
Ein Stoß, bei dem ein Teil der Energie in andere als Bewegungsenergie umgewandelt wird, heißt plastisch oder unelastisch

Quantitative Behandlung des Stoßes

a. <u>elastischer Stoß</u>

Wir betrachten zwei Wagen auf gerader Bahn:

Wagen 1: $m_1, \vec{v}_1$, Wagen 2: m_2 , $\vec{v}_2$

Bei Vernachlässigung der Reibung müssen für das Gesamtsystem Impuls- und Energiesatz gelten:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$ Impulssatz

$$\frac{m_1}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^{\,2} = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1'^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2'^{\,2}$$ Energiesatz

mit

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$: Geschwindigkeiten <u>vor</u> dem Stoß

$\vec{v}_1', \vec{v}_2'$: Geschwindigkeiten <u>nach</u> dem Stoß

Wenn $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$ unbekannt, dann kann aus den zwei Gleichungen $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ bestimmt werden:

Lösung:

$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{\vec{v}_2(m_2 - m_1) + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

<u>Beispiel:</u> $m_1 = m_2$

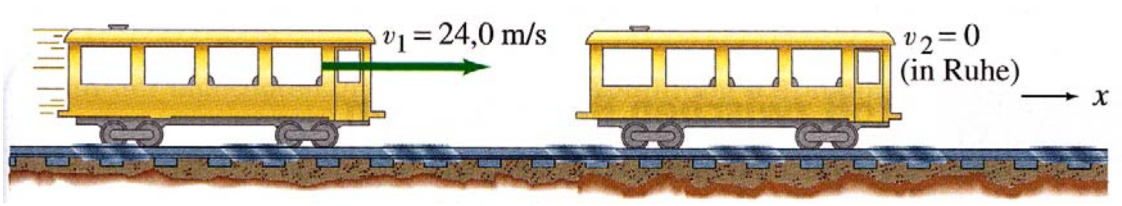
$$\vec{v}_1' = \frac{\vec{v}_2 \cdot 0 + 2m_2\vec{v}_2}{2m_2} = \vec{v}_2 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1' = v_2$$

$$\vec{v}_2' = \frac{\vec{v}_2 \cdot 0 + 2m_1\vec{v}_1}{2m_1} = \vec{v}_1 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_1$$

Ist außerdem der zweite Wagen vor dem Stoß in Ruhe, d.h. $\vec{v}_2 = 0$, dann wird

$$\vec{v}_1' = 0 \qquad \vec{v}_2' = \vec{v}_1$$

Die Geschwindigkeit des ersten Wagens wird vollständig auf den zweiten Wagen übertragen.



b. unelastischer (plastischer) Stoß

Der Energiesatz gilt nicht mehr, wohl aber der Impulssatz

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$\vec{v}$ ist die gemeinsame Geschwindigkeit beider Wagen nach dem Stoß:

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$