Universität Duisburg-Essen

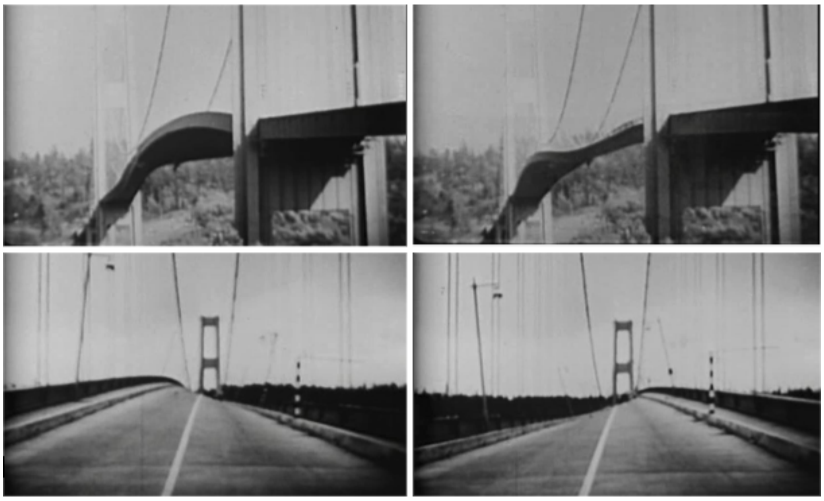


Abbildung 1: Tacoma Bridge Momentaufnahmen

Versuchsanleitung für das Anfängerpraktikum

A05 Pohlsches Drehpendel

30. Oktober 2024

Raum MD165

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Informationen

1.1 Literatur

1. Gerthsen, Kneser, Vogel
2. Anleitungen Leybold Didactic
3. Demtröder Band 1

4. Wikimedia (Tacoma Narrows Bridge)

1.2 Stichworte

- Harmonische Schwingungen
- Dämpfung
- Freie, gedämpfte und erzwungene Schwingungen
- Eigenfrequenz
- Schwingfall
- Aperiodischer Grenzfall
- Kriechfall

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Voraussetzungen

Harmonische Schwingungen; Dämpfung; freie, gedämpfte und erzwungene Schwingungen; Eigenfrequenz; Schwingfall; aperiodischer Grenzfall; Kriechfall.

2.2 Freie ungedämpfte Schwingung

Wirkt auf einen beweglichen Körper, der aus seiner Ruhelage ausgelenkt wurde, lediglich eine der Auslenkung entgegen gerichtetet un zu ihr proportionalen Kraft, wird er eine *harmonische Schwingung* um seine Ruhelage ausüben, d.h. seine Auslenkung wird allgemein durch eine Linearkombination der Zeitfunktionen sin(ωt) und cos(ωt) beschrieben; es handelt sich um eine *freie ungedämpfte harmonische Schwingung*. Die Maximalauslenkung und Energie dieser Schwingung ist zeitlich konstant.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist das mathematische Schwerependel (Abb. 2.1 a) Dieses Fadenpendel ist idealisiert, da seine Masse m punktförmig, der Faden mit Länge l dehnungsfrei und masselos und darüber hinaus die Aufhängung und Bewegung des Pendels als reibungsfrei angenommen wird. Ist die Bogenlänge s = 1φ die Auslenkung der Masse m, wirkt aufgrund der Schwerkraft F$_G$ die Kraft $F_S = -mg \cdot sin(\varphi)$ in Richtung der Auslenkung. Für kleine Winkel φ ist sin(φ)≈φ; $F_S \approx mg\varphi = \frac{mgs}{l}$, sodass dann die Bewegungsgleichung des Pendels lautet:

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0 \tag{1}$$

Die allg. Lösung dieser linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung für die Zeitabhängig Auslenkung s(t) lautet:

$$s(t) = s_0 \cdot sin(\omega_0 + \alpha) \tag{2}$$

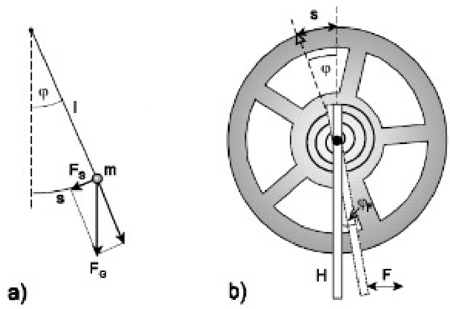


Abbildung 2: a) Mathematisches Pendel b) Drehpendel

s_0 ist die Amplitude der Schwingung $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ die Kreisfrequenz, f_0 die Frequenz, T_0 die Schwingungsdauer und α ein Phasenwinkel. s_0 und α sind durch die Anfangsbedingungen der Schwingung s(0) und $\dot{s}(0)$ festgelegt.

2.3 freie gedämpfte Schwingung

Im makroskopischen, mechanischen Systemen kommen ungedämpfte Schwingungen selten vor. Ein reales Pendel erfährt während seiner Bewegung Reibugnskräfte, z.B. bedingt durch die Reibung der Lager. Ein Beispiel für ein solches reales Pendel ist das in diesm Versuch eingesetzte Drehpendel nach Pohl (Abb 2.1 b). Eine runde MEtallscheibe ist im Zentrum mit einer horizontal liegenden Drehachse gelagert. Mit der Drehachse verbunden ist das innere Ende einer um die Achse gewundenen Spiral-Blattfeder. Deren äußeres Ende ist an einem ebenfalls um die Achse drehbaren Hebel H befestigt. Wird bei festgehlatenem Hebel die Scheibe um einen (kleinen) Winkel φ aus der Ruhelage gedreht, bewirkt die dadurch erzeugte Spannung der Feder ein rücktreibendes Drehmoment $M_D = -D \cdot \varphi$. D ist die Winkelrichtgröße der Feder. Ist die Reibung des Pendels viskos, z.B. infolge der inneren Reibung des Ölfilms im Drehlager ode rder Wirkung einer am Pendel montierten Wirbelstrombremse (s.u.), wirkt ein weiteres, die bewegung hemmendes Drehmoment $M_R = -R \cdot \dot{\varphi}$. Die Bewegungsgleichung für φ bzw. die Auslenkung $s = r\varphi$ des Pendels (r = Scheibenradius) lautet damit:

$$I\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} + D\varphi = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{s} + 2\beta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{3}$$

I ist das Trägheitsmoment der Scheibe (s. Versuch A8, Trägheitsmomente), $2\beta = \frac{R}{I}$ ein Reibungskoeffizient, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ die Kreisfrequenz der ungedämpften Pendelschwingung. Die Lösung der DGL 2.3 hat die Form:

$$s(t) = s_0 e^{\lambda t} \tag{4}$$

Einsetzen in Gleichung 2.3 führt zu der Form:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{5}$$

mit den Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung für die Pendelbewegung ist mit den Gleichungen 2.4 und 2.6 die Linearkombination:

$$s(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

Werden die speziellen Anfangsbedingungen s(0) = s_0 und $\ddot{s}(0) = 0$ gewählt, lautet die Lösung:

$$s(t) = \frac{s_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right) \tag{8}$$

Zur Diskussion der Pendelbewegung werden drei Fälle mit unterschiedlichem β als Maß für die Stärke der Dämpfung betrachtet:

1. Im Fall $\beta > \omega_0$ sind λ_1 und λ_2 beide reell un dnegativ. Die Bewegung ist stark gedämpft. Das Pendel schwingt nicht, sondern bewegt sich monoton (und relativ langsam) aus der Anfangsposition in die Ruhelage. Man nennt dies den *Kriechfall* (s. Abb 2.2 a)

2. Im Fall $\beta < \omega_0$ sind λ_1 und λ_2 komplex. Es liegt nur eine schwache Dämpfung, der *Schwingfall* vor (s. Abb 2.2 b). Mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$ folgt:

$$\begin{aligned} s(t) = s_0 e^{-\beta t} \cdot \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\beta}{\omega}\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right) \\ = s_0 e^{-\beta t} \cdot \left(cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} sin(\omega t)\right) \end{aligned} \tag{9}$$

   Gleichung 2.9 stellt eine Schwingung dar, deren Amplitzude zeitlich exponentiell abnimmt. Aus den Nullstellen der zeitlichen Ableitung von s(t) erhält man die
   Maxima bei: $t = \frac{2\pi \cdot n}{\omega} = nT$
   Minima bei: $t = \frac{2\pi \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\omega} = \left(n + \frac{1}{2}\right) T$ n=0,1,2,...
   Der Faktor $e^{-\beta t}$ in Gleichung 2.9 ist die *Amplitudenfunktion* (s. Abb. 2.2 c). Das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Maxima der Schwingung wird *Dämpfungsverhältnis k* genannt,

$$k = \frac{s(t)}{s(t+T)} = e^{\beta T} \tag{10}$$

   bzw. $\beta T = \Lambda = ln(k)$, das *logarithmische Dämpfungsdekret.* Das Verhältnis der Schwingungszeiten von gedämpfter und ungedämpfter Schwingung ist:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \tag{11}$$

   In den meisten Fällen unterscheiden sich T und T_0 nur wenig (<1%).

3. Der Fall $\beta = \omega_0$ heißt *Aperiodischer Grenzfall.* Die Lösung für die Bewegung des Pendels ergibt sich durch Grenzwertbildung $\omega \to 0$ aus Gleichung 2.9:

$$s(t) = s_0 \cdot e^{-\beta t}(1 + \beta t) \tag{12}$$

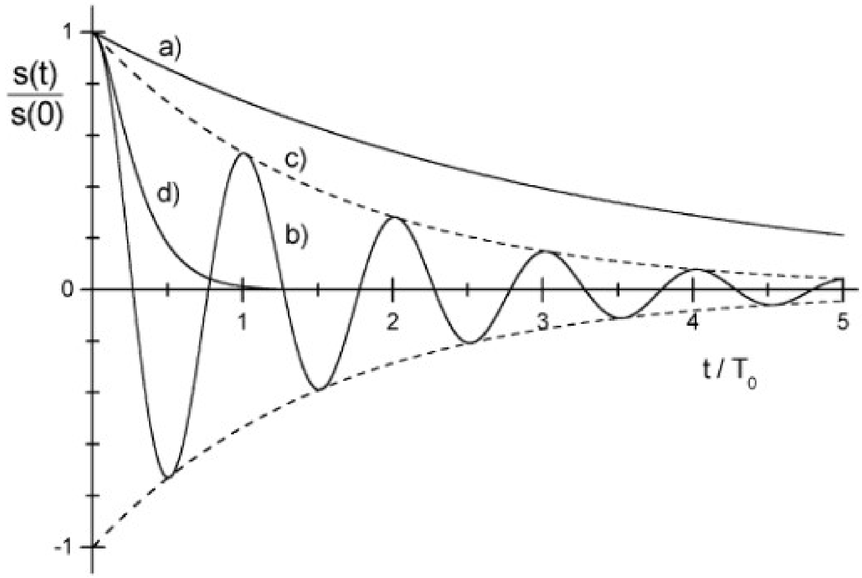


Abbildung 3: Gedämpfte Schwingung:
a) Kriechfall, $\beta \approx 10 \cdot \omega_0$
b) Schwingfall,$\beta \approx \frac{\omega_0}{10}$
c) Amplitudenfkt. $e^{-\beta t}$ für Schwingfall
d) aperiodischer Grenzfall, $\beta = \omega_0$

Im aperiodischen Grenzfall bewegt sich das Pendel bei gegebener Kreisfrequenz ω_0 ohne vor und zurück zu schwingen in der kürzesten Zeit ($\Delta t \approx T_0$ von der Anfangsposition in die Ruhelage (siehe Abbildung 2.2 d)

2.4 Lösung der DGL zur gedämpften Drehschwingung

Die Differentialgleichung für eine freie Drehschwingung mit Dämpfung lautet:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = 0 \tag{13}$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment, β die Dämpfungskonstante und k' die Winkelrichtgröße der rücktreibenden Spiralfeder. Eine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\varphi = Ae^{i\omega t} \tag{14}$$

Nach Euler gilt $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ mit $i = \sqrt{-1}$. A ist eine Konstante und gibt die Amplitude der freien Schwingung an, ω die Kreisfrequenz. Die Beziehung zwischen Kreisfrequenz ω, Frequenz f und Schwingungsdauer T lautet: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Die Differentialgleichung für die erzwungene Drehschwingung lautet:

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + k'\varphi = A_0 e^{i\omega t} \tag{15}$$

mit A_0 als Amplitude des auf den Drehschwinger einwirkenden Drehmoments, wobei $A_0 = k'^{\dot{\varphi}} = J\omega_0^2\varphi_0$.

Der Lösungsansatz für diese Differentialgleichung ist:

$$\varphi = Ae^{i(\omega t - \alpha)} \tag{16}$$

wobei α die Phasendifferenz zwischen den Schwingungen des Pendels und des einwirkenden äußeren Drehmomentes ausdrückt. Differenzieren und Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung liefert die Bestimmungsgleichungen für die Amplitude A und die Phasenverschiebung α:

$$\dot{\varphi} = i\omega Ae^{i(\omega t-\alpha)}, \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t-\alpha)} \tag{17}$$

$$-\omega^2 AJe^{i(\omega t-\alpha)} + i\beta\omega Ae^{i(\omega t-\alpha)} + k'Ae^{i(\omega t-\alpha)} = A_0 e^{i\omega t} \tag{18}$$

Teilt man diese Gleichung durch $J \cdot e^{i(\omega t-\alpha)}$, so erhält man:

$$-\omega^2 A + i\frac{\beta}{J}\omega A + \frac{k'}{J}A = \frac{A_0}{J}e^{i\alpha} \tag{19}$$

mit $\frac{\beta}{J} = 2\delta$ und $\frac{k'}{J} = \omega_0^2$ folgt:

$$-\omega^2 A + 2i\delta\omega A + A\omega_0^2 = \frac{A_0}{J}e^{i\alpha} \tag{20}$$

Diese Gleichung wird in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Für den Realteil muss gelten:

$$-\omega^2 A + A\omega_0^2 = \frac{A_0}{J}\cos(\alpha) \tag{21}$$

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \frac{A_0^2}{J^2}\cos^2(\alpha) \tag{22}$$

Für den Imaginärteil muss gelten:

$$2\delta\omega A = \frac{A_0}{J}\sin(\alpha) \tag{23}$$

$$4\delta^2\omega^2 A^2 = \frac{A_0^2}{J^2}\sin^2(\alpha) \tag{24}$$

Addition der Gleichungen (1) und (2) liefert:

$$A^2\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2\right] = \frac{A_0^2}{J^2} \tag{25}$$

Aus Gl. (11) ergibt sich für die Amplitude der erzwungenen Schwingung:

$$A = \frac{A_0}{J\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}} \tag{26}$$

Division der Gleichungen (10) und (9) liefert für die Phasenverschiebung α zwischen Erreger und Schwinger:

$$\tan(\alpha) = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{27}$$

Die Funktion für die Auslenkung des Schwingers in Abhängigkeit der Zeit ergibt sich durch Einsetzen von (12) in den Realteil des obigen Lösungsansatzes:

$$\varphi = \frac{A_0}{J\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\alpha\right) \tag{28}$$

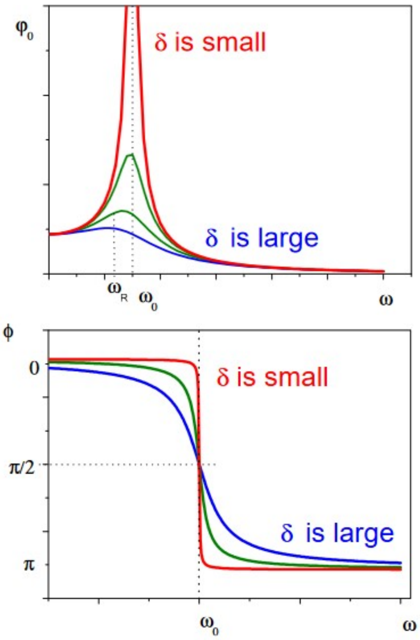
Trägt man das Amplitudenverhältnis $\frac{A}{A_0}$ über dem Frequenzverhältnis $\frac{f}{f_0}$ auf, so ergeben sich die in Abb. 2 dargestellten Kurven. Dabei ist A_0 die Amplitude des Erregersystems und f_0 die Eigenfrequenz des Drehpendels.
Es ist zu erkennen, dass sich die Resonanzfrequenz mit zunehmender Dämpfung nach links verschiebt.

3 Durchführung

3.1 Geräte- und Materialliste

Verwendete Geräte:

- Pohlsches Rad
- 2 Netzteile



0.4

Abbildung 4: Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung (Quelle: Anleitung Leyold)

- Kabel
- 2 Multimeter

3.2 Aufbau

Das eigentliche Pendel besteht aus einer drehbar gelagerten ringförmigen Scheibe aus Kupfer (3), die mit einer Spiralfeder (4) verbunden ist. Verdreht man die Scheibe aus ihrer Ruhelage, so erzeugt die Spiralfeder ein rücktreibendes Moment, so dass die Scheibe nach dem loslassen Schwingungen ausführt, deren Amplitude in Folge von Reibung abklingt. Die Dämpfung lässt sich durch eine Wirbelstrombremse einstellen. Man notiert sich den jeweils eingestellten Strom durch den Elektromagneten (1) als Dämpfungsmaß. Über eine Exzenterscheibe (11), die von einem Motor mit regelbarer Drehzahl angetrieben wird, kann das Drehpendel mittels einer Schubstange (12) zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Durch Veränderung der Spannung, mit der der Motor gespeist wird, kann die Drehzahl des Motors geändert werden.

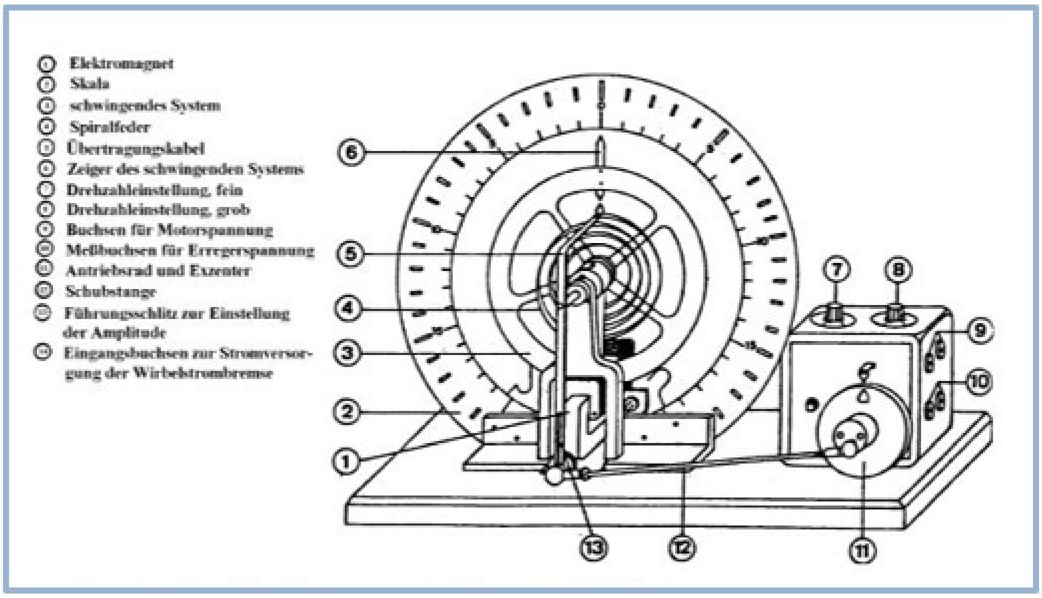


Abbildung 5: Aufbau nach Pohl (Quelle: Anleitung Leybold)

3.3 Durchführung des Versuchs und Aufgaben

1. **Eigenfrequenz bestimmen:** Zuerst soll die Eigenfrequenz (Frequenz der freien Schwingung ohne Dämpfung) bestimmt werden, indem man das System erregt und mit Hilfe einer Stoppuhr die Zeit t von $n = 10$ Schwingungen misst. Wiederholen Sie dies dreimal und bestimmen Sie für jeden Durchgang den Mittelwert T. Daraus folgt:
$$f_0 = \frac{1}{\bar{T}} \quad \text{(Berechnen Sie } f_0 \text{ für jeden Durchgang)}$$

2. **Aufnahme der Resonanzkurve:** Zur Aufnahme der Resonanzkurve wird eine konstante Dämpfung ($I_D = \text{konst.} = 0, 300, 600$ mA) eingestellt.
   a) Starten Sie mit der Bestimmung der Eigenfrequenz des Drehpendels.
   b) Messen Sie für drei verschiedene Dämpfungen (eingestellte Stromstärken: 0 mA, 300 mA und 600 mA) die Amplitude der erzwungenen Schwingung $A = A(f_{\text{err}})$ in Abhängigkeit der Erregerfrequenz.
   c) Die Spannung für den Erreger sollte im Bereich der Resonanz in möglichst kleinen Schritten ($U \leq 0.5$ V) verändert werden. Beginnen Sie mit einer Spannung von 2 Volt. Aufgrund der nicht symmetrischen Schwingung des Drehpendels sind für jede Frequenz die linke und die rechte Amplitude aufzunehmen.
   d) Ermitteln Sie mit Hilfe der Erregerspannung und der Eichkurve $f_{\text{err}} = f(U_x)$

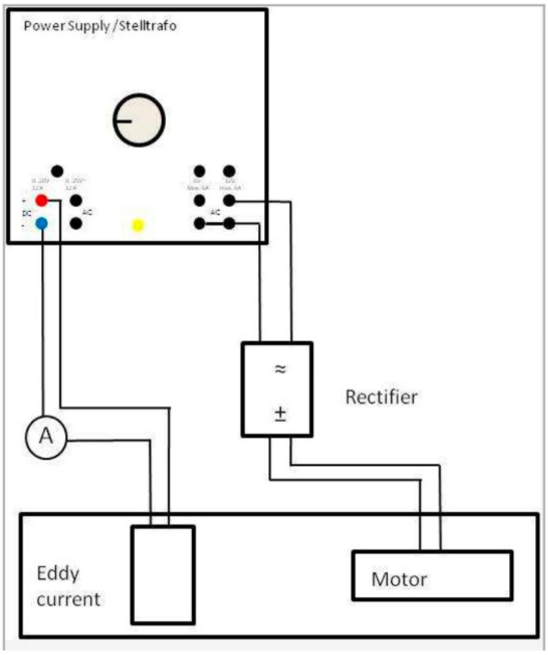


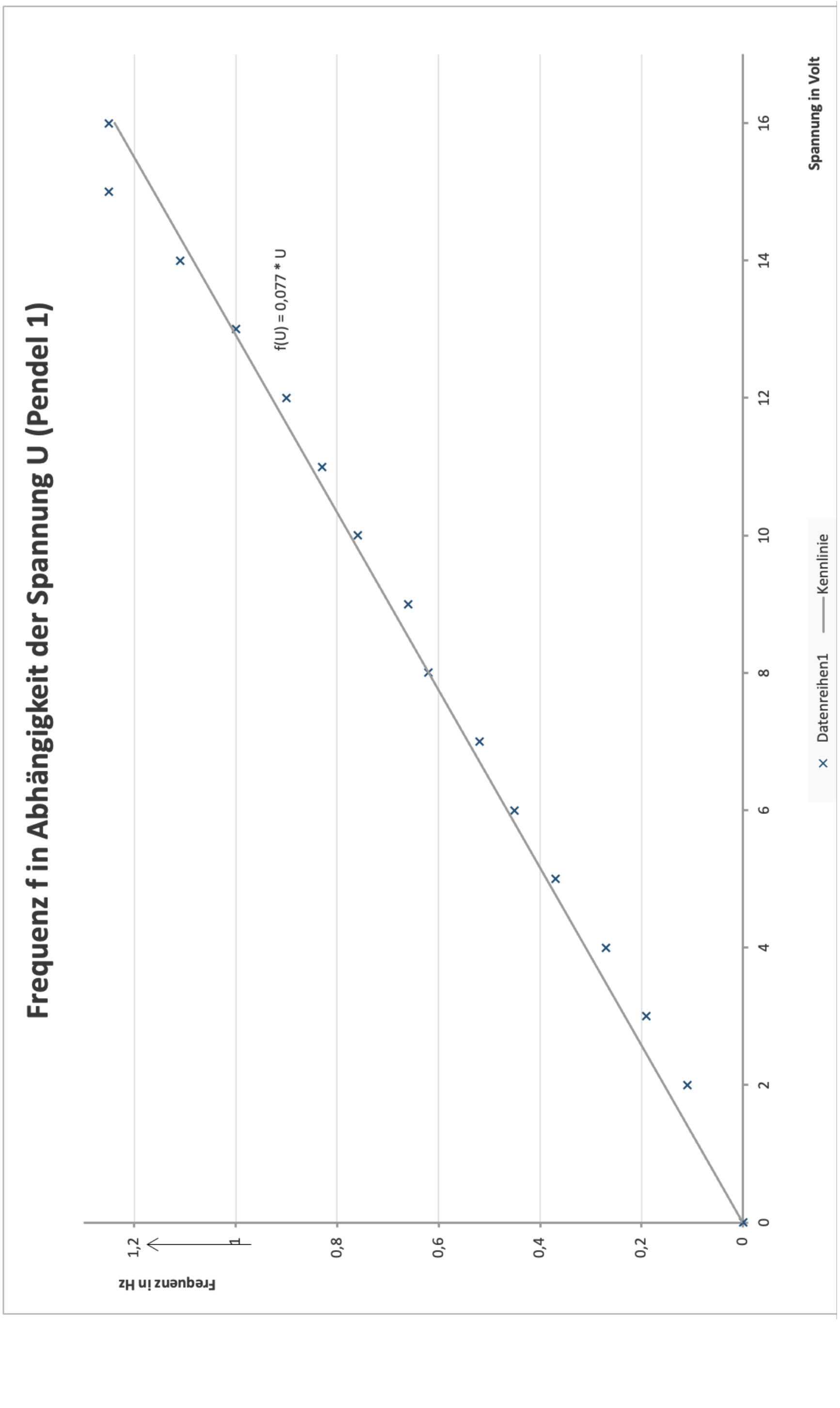
Abbildung 6: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus: (A) Erreger, (B) Wirbelstrombremse (Quelle: Leybold Versuchsanleitung)

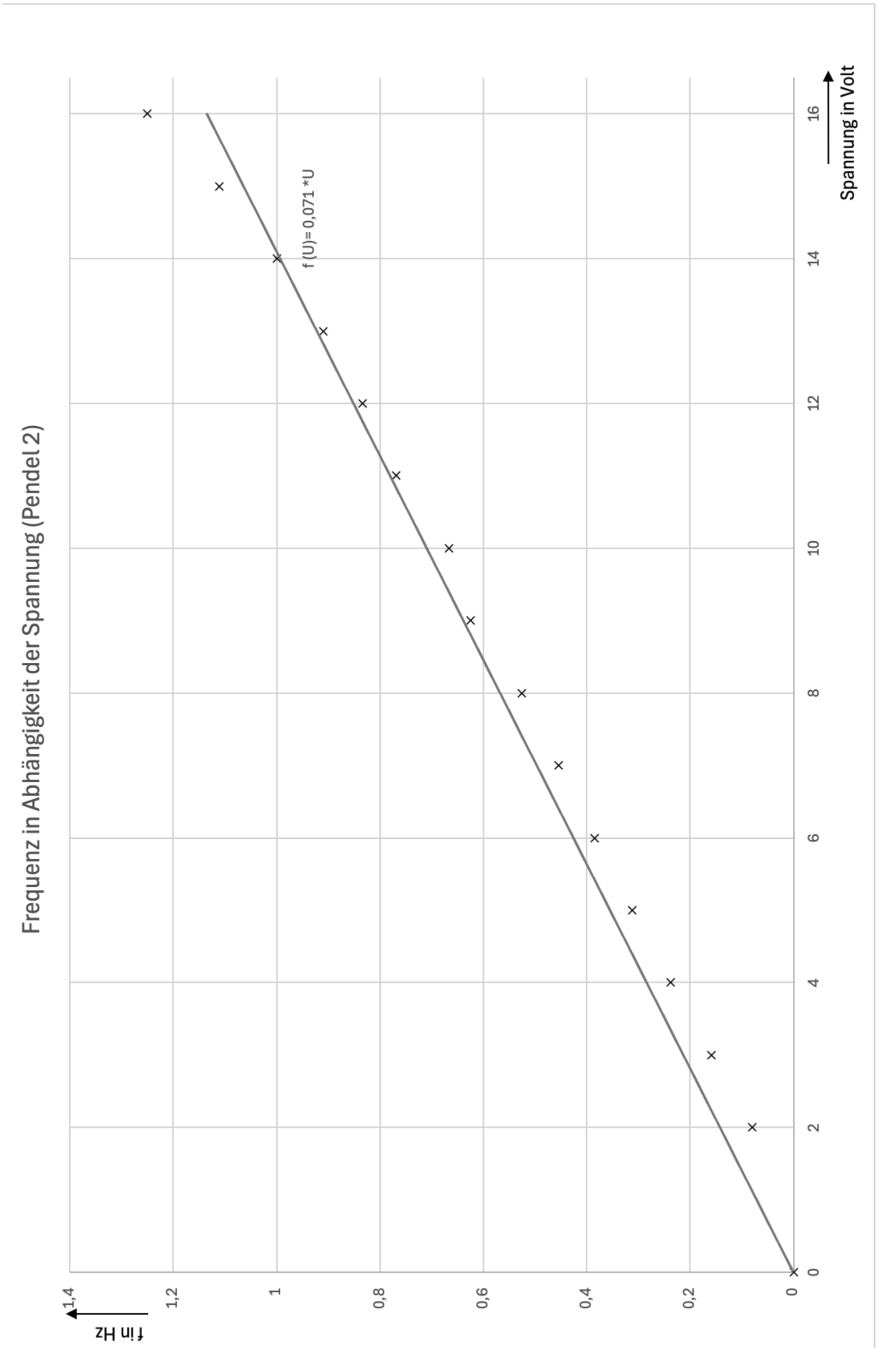
die Erregerfrequenz f_{err} (siehe Anhang).

e) Bilden Sie den Mittelwert aus der linken und rechten Amplitude und tragen Sie die Mittelwerte in Abhängigkeit der erregenden Frequenz f_{err} für die drei Dämpfungen in einen Graphen ein, sodass Sie drei Resonanzkurven erhalten.

f) Begründen Sie eingehend, wieso im Resonanzfall der Erreger dem Schwinger zu jedem Zeitpunkt Energie zuführt und es bei geringer Dämpfung zur „Resonanzkatastrophe“ kommen muss.

3. **Anwendungen:** Beschreiben Sie mindestens je drei Beispiele, wo Resonanzerscheinungen beobachtbar und erwünscht bzw. wo sie schädlich sind.


Frequenz f in Abhängigkeit der Spannung U (Pendel 1)
f(U) = 0,077 * U
Frequenz in Hz
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Spannung in Volt
Datenreihen1
Kennlinie


Frequenz in Abhängigkeit der Spannung (Pendel 2)
f (U)= 0,071 *U
f in Hz
Spannung in Volt
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
0
2
4
6
8
10
12
14
16