Universität Duisburg-Essen

Abbildung 1: Aufbau

Quelle: https://www.phywe.de/versuche-sets/hochschulversuche/elastizitaetsmodul_9504_10435/

Versuchsanleitung für das Anfängerpraktikum

A09 Bestimmung des Elastizitäts- und Schubmoduls

12. August 2024

Raum ME143

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Informationen

1.1 Literatur

1. Bergmann/Schäfer, Experimentalphysik Bd. 1
2. Walcher, Praktikum der Physik
3. Krötsch, Physikalisches Praktikum

1.2 Stichworte

- Spannung
- Dehnung
- Biegung
- Torsion
- Drehschwingung
- Trägheitsmoment
- Spannung-Dehnungs-Diagramm
- elastisches und anelastisches Verhalten

2 Grundlagen

Das elastische Verhalten fester Körper (genauso wie das plastische Verhalten) ist in der Praxis von außerordentlicher Bedeutung. Man erwartet von vielen mechanischen Bauteilen gleich welcher Art (Brücken, Flugzeugtragflächen, Kränen), dass sie dauernden (oder wechselnden) äußeren Kräften standhalten und nach Entlastung wieder ihre ursprüngliche Form annehmen, d.h. sich elastsich verhalten. Andererseits erwartet man auch, dass z.B. Metalle und Legierungen durch Walzen oder Pressen in eine bestimmte Form gezwungen werden können, d.h. sich auch plastisch verhalten können. In der Festkörperphysik sind die dabei ablaufenden mikroskopischen Vorgänge im Prinzip gut verstanden. Für das Verständnis der elastischen Prozesse kann man dabei vom sog. *idealen Festkörper* ausgehen. Für das Verständnis der plastischer Vorgänge bei der Verformung sind Baufehler, sog. *Versetzungen* erforderlich. Dies soll hier jedoch nicht weiter betrachtet werden.

Ein idealer Festkörper besteht aus einer regelmäßigen Anordnung von Atomen (Kristallgitter), die durch die Bindungskräfte (z.B. kovalente oder metallische Bindung) in ihren GLeichgewichtslagen gehalten werden. Die Gleichgewichtslagen entsprechen den Minima von Potenzialmulden (sog. *Gitterpotenzial*). Bei Einwirkung einer äußeren Kraft erfolgt eine Verschiebung der Atome aus den Gleichgewichtslagen. Überschreitet dabei die äußere Kraft einen gewissen Grenzwert nicht (Streckgrenze), so dass die Atome nicht über den Rand des Potenzialtopfes in einen benachbarten Potenzialtopf gezwungen werden (das entspräche plastischer Verformung), so fallen sie nach entlastung wieder in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück.

Der bei geringer elastischer Verformung geltende lineare Zusammenhang zwischen der angelegten *Spannung* σ und der auftretenden *Dehnung* ϵ wurde für Metalle schon 1665 von Robert Hooke erkannt:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad Hooke'schesGesetz \tag{2.1}$$

Hierbei sind z.B. für eine stabförmige Probe der Länge l die Dehnung ε gegeben durch $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, wobei Δl der Zunahme der Länge durch die äußere Kraft entsprich. Dier Spannung σ ist gegeben durch den Quotienten, der zum Querschnitt q *senkrecht* stehenden äußeren Kraft F und dem Stabquerschnitt q, also $\sigma = \frac{F}{q}$. Bei Dehnung ist $\varepsilon > 0$, bei Stauchung $\varepsilon < 0$.

Der Proportionalitätsfaktor E heißt *Elastizitätsmodul* (kurz: E-Modul, Einheit: $\frac{1}{m^2}$; üblich: $1GPa = 10^9 \frac{N}{m^2}$). Der E-Modul ist eine materialspezifische Größe und seine Kenntnis in der Technik und Materialkunde von großer Bedeutung.

Das Gesetz von Hooke gilt in der angegebenen Form nur für sog. *isotrope* Stoffe, d.h. Stoffe, bei denen die elastische Verformung von der Kristallrichtung unabhängig ist. Auch dies ist in der Anwendung meist der Fall, weil die verwendeten Metalle und Legierungen aus regellos orientierten Kristalliten bestehen (sog. *Polykristallen*) und sich anisotrope Eigenschaften im Mittel nicht zeigen.

Greift eine Kraft *parallel* zum Querschnitt q eines Körpers an, dann wird er durch die Kraft abgeschert, seine zuvor senkrechten Kanten werden um den Winkel γ *gekippt* (vgl. Abb. 2.1). Nennen wir $\tau = \frac{F}{q}$ die *Schubspannung*, so gilt bei kleinen Belastungen ein dem Hooke´schen Gesetz analoger Zusammenhang:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{2.2}$$

wobei G das *Schubmodul* ist (Einheit wie E-Modul.

2.1 Methoden zur Bestimmung der elastischen Konstanten

Es gibt verschiedene Methoden zur Bestimmung der elastischen Größen (Elastizitätsmodul, Schubmodul) eines Festkörpers. Die bekannteste Methode ist der Zugversuch, bei dem der Elastizitätsmodul direkt mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes bestimmt werden kann.

Im Praktikum wird z.B. die Dehnung eines vertikal aufgehängten Stahldrahtes bei variabler Zugspannung bestimmt. Das obere Drahtende ist ortsfest eingespannt, während am unteren Ende eine Schale hängt, welche mit Gewichten verschiedener Massen m belastet wird. Die Höhenänderung einer in der Nähe des unteren Drahtendes angebrachten Markierung wird mit einem im Abstand von ca 1 bis 2 m aufgestellten Kathetometer mittels eines Messfernrohrs bestimmt, dessen verstellbare Höhe auf einer Skala abgelesen wird. Auf diese Weise kann eine Lagenänderung des Drahtes auf ca. 0,02 mm genau bestimmt werden.

Eine weitere Methode ist der Biegeversuch. Es liegt z.B. ein Stab mit recheckigem Querschnitt in der Nähe seiner beiden Enden auf schneidenförmigen Stützen L in gleicher Höhe, also Horizontal auf (s. Abb. 2.1). Wirkt auf den Stab in der Mitte zwischen den Stützen nach unten eine Kraft F, z.B. durch ein angehängtes Gewicht, so wird er sich der Kraft entsprechend durchbiegen. Dabei wird er in seinem oberen Querschnittsteil gestaucht und im unteren gedehnt.

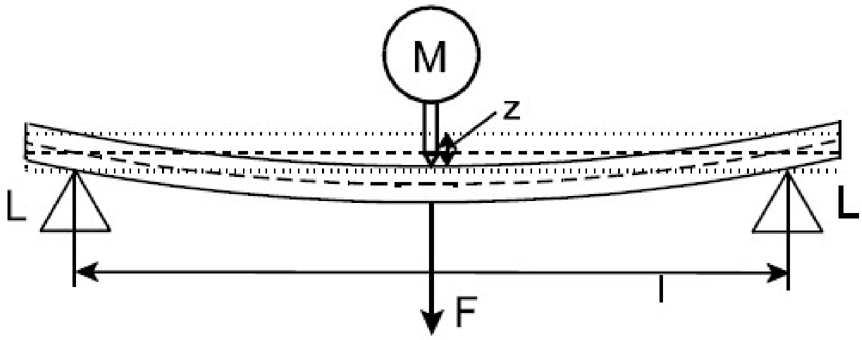

Abbildung 2.1: Biegeversuch:
Stab auf Schneidlagern L im Abstand l
Messuhr M zur Bestimmung dur Durchbiegung z infolge der Kraft F

In mittlerer Höhe des Stabquerschnitts existiert eine Schicht, die sog. *neutrale Faser*, die weder Stauchung noch Dehnung erfährt. Die maßgebende elastische Konstante im Fall der Biegung ist also der Elastizitätsmodul (Druckspannung im oberen Teil, Zugspannung im unteren Teil des Stabquerschnitts). Die genaue Berechnung ergibt für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt einen Ausdruck für die (geringe) Durchbiegung z in der Form:

$$z = \frac{l^3 F}{4Ebh^3} \tag{2.3}$$

Hierbei sind:

z = Höhenänderung des Stabes in der Mitte zwischen den Auflagepunkten
l = Abstand der Auflagepunkte
h = Höhe des Stabquerschnitts
b = Breite des Stabquerschnitts
F = Kraft senkrecht zur Auflageebene
E = Elastizitätsmodul

(Für eine Herleitung der Gl. 2.3 s. Bergmann-Schäfer, Bd.1)

Die Bestimmung des Schubmoduls ist z.B. aus dem Torsionsverhalten eines zylinderförmigen Festkörpers möglich. Betrachten wir zunächst die Torsion eines Hohlzylinders (s. Abb.2.2) um den Winkel φ, so deformiert sich die in der Abb. 2.2. herausgegriffene prismatische Säule in der gezeichneten Weise um den Scherwinkel α, wenn wir sie am unteren Ende festgehalten denken und oben tangential die Kraft dF wirkt.

Für kleine Torsionswinkel φ gilt für den Scherwinkel α:

$$\alpha = \frac{r \cdot \varphi}{l} \tag{2.4}$$

mit l = Länge, r = Radius des Zylinders

Die Torsion wird durch die Scherungskraft dF hervorgerufen. Somit ist die Schubspannung τ des Hohlzylinders für kleine Scherwinkel α mit Gleichungen 2.2 und 2.4 gegeben durch:

$$\tau = \frac{dF}{2\pi r dr} = G \cdot \alpha = \frac{Gr\varphi}{l} \tag{2.5}$$

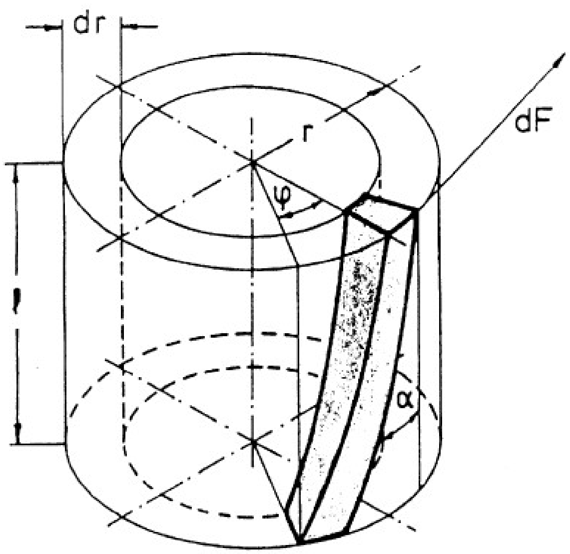

Abbildung 2.2: Torsion eines Hohlzylinders

Die Kraft dF bewirkt ein Drehmoment dM (vgl. Versuch A8). Mit $d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F}$, hier $dM = r\, dF$ und Gleichung 2.5 folgt:

$$dM = \frac{2\pi r^3 \cdot G \cdot \varphi}{l}\, dr \tag{2.6}$$

Für das auf einen Vollzylinder (Radius R) wirkende Drehmoment M müssen die Beiträge dM aller Hohlzylinder von r=0 bis r=R aufsummiert werden, d.h. Gleichung 2.6 muss in diese Grenzen integriert werden. Dies liefert:

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{l}\int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4 G\varphi}{2l} \tag{2.7}$$

Da die Torsion des Zylinders bewirkende Drehmoment ist im Gleichgewicht mit dem (die Torsion) rücktreibende Moment $M = D\varphi$. Hieraus ergibt sich (vgl. Versuch A8) für die sog. *Winkelrichtgröße* D:

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \tag{2.8}$$

Die Eigenschwingdauer eines Torsionspendels (vgl. Versuche A4, A8) - zylinderförmiger Draht , Drehmasse mit Trägheitsmoment I_0 - ist gegeben durch:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{2.9}$$

Einsetzen der Gleichung 2.9 in Gleichung 2.8 liefert:

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{I_0}{{T_0}^2} \tag{2.10}$$

Da das im Versuch verwendete Torsionspendel (eine Scheibe einschl. Befestigungsstange mit Flügelschrauben) keine einfache gewometrische Form hat, sich also ihr Trägheitsmoment I_0 nicht ohne weiteres berechnen lässt, geht man in folgender Weise vor (gergl. Versuch A4):

Man bringt Zusatzscheiben mit den Massen m_1 und m_2 und den Radien r_i (Loch) und r_a (außen) an. Dann folgt bei l Zusatzscheibe bzw. 2 Zusatzscheiben aus Gleichung 2.10:

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{I_0 + \frac{1}{2}m_1\left({r_i}^2 + {r_a}^2\right)}{{T_1}^2} \quad bzw. \quad G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{I_0 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left({r_i}^2 + {r_a}^2\right)}{{T_2}^2} \tag{2.11}$$

Dabei sind T_1 und T_2 die entsprechenden Schwingungszeiten. Mit Gleichung 2.10 kann I_0 in Gleichung 2.11 eliminiert werden und man erhält:

$$G = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{m_1\left({r_i}^2 + {r_a}^2\right)}{{T_1}^2 - {T_0}^2} \quad bzw. \quad G = \frac{4\pi l}{R^4} \cdot \frac{(m_1 + m_2)\left({r_i}^2 + {r_a}^2\right)}{{T_2}^2 - {T_0}^2} \tag{2.12}$$

3 Aufgabenstellung

3.1 1. Aufgabe

Bestimmen Sie den E-Modul eines Stahldrahts durch Messung der Dehnung.

3.2 2.Aufgabe

Bestimmen Sie den E-Modul von vier verschiedenen Metallstäben (Messing, Kupfer, Aluminium und Stahl) aus der Biegung.

3.3 3. Aufgabe

Bestimmen Sie den Schubmodul eines Stahldrahtes aus der Torsionsschwingung.

4 Versuchsdurchführung

4.1 E-Modul-Bestimmung aus Dehnungsmessung

Nach Messung der Länge l des unbelasteten Drahtes (l = Länge vom oberen Einklemmpunkt bis zur Markierung) visiere man mittels des Messfernrohrs die Markierung an. Durch vertikales Verstellen des Fernrohrs wird das Fadenkreuz bzw. die Nullmarke des Okulars mit der Markierung des Drahtes zur Deckung gebracht. Man bestimme die Höhenänderung Δl des Drahtes für verschiedene Lasten $F = mg$. Die Massen m werden in Schritten von 500 g bis zu einer maximalen Masse von 4 kg erhöht. Den Durchmesser d des Drahtes bestimme man an 5 verschiedenen Stellen mittels einer Mikrometerschraube.

4.2 E-Modul-Bestimmung aus der Biegung

Man bestimme die Dimension b und h der vorliegenden Metallstäbe, sowie den Abstand l der Auflager. Die Durchbiegung z ermittle man mit der Messuhr. Die Belastung m erhöhe man schrittweise um 0,5 kg bis max. 3 kg. Bei jeder Belastung sind zwei Ablesungen vorzunehmen. Da die Messuhr bei geringer Höhenänderung der Messspitze eine Hemmung aufweist, wird empfohlen, eine Messung nach zunehmender, die andere nach abnehmender Last vorzunehmen. Hierfür wird das Gewicht vor der Messung jeweils leicht angehoben bzw. heruntergezogen.

4.3 Schubmodul-Bestimmung aus Torsionsschwingung

Die Massen der anzubringenden Scheiben sind auf ihnen (in g) angegeben. Die Länge l des Drahtes bestimmt man mit Hilfe eines Maßstabs, den Radius R mit Hilfe einer Mikrometerschraube (5 Messungen an verschiedenen Stellen. Mittelwert!), r_i und r_a der Scheiben sind mit einer Schieblehre zu messen. Die Schwingungszeiten T_0, T_1 und T_2 bestimmt man aus je zwei Messungen zu 20 Schwingungen (Mittelwert!).

5 Auswertung

5.1 E-Modul-Bestimmung aus Dehnungsmessungen

Man ermittle den mittleren Durchmesser d des Drahtes. Die Längenänderung Δl des Drahtes ist als Funktion von m auf Millimeterpapier aufzutragen. Aus der Steigung a einer Ausgleichsgeraden ist E gemäß Gleichung 2.1 zu bestimmen, d.h.:

$$E = \frac{4gl}{a\pi d^2} \tag{5.1}$$

Beachten Sie bei der Ausgleichsgeraden, dass für keine bzw. kleine Last der Draht gebogen ist d.h. Gleichung 2.1 nicht gelten muss.

Schätzen Sie den relativen Größtfehler voon E nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ab. Hierbei ist der Fehler in der Längenmessung ($\Delta l_0 = 1mm$) und der Dickenmessung ($\Delta d = 0,01mm$) des Drahtes und aus der Auftragung $\Delta l(m)$ der Fehler Δa in der Steigung der Ausgleichsgeraden zu berücksichtigen.

5.2 E-Modul-Bestimmung aus der Biegung

Man berechne aus den Mittelwerten der Messuhranzeigen die Durchbiegung z und trage sie als Funktion von m für alle Stäbe gemeinsam auf Millimeterpapier auf. Aus den Steigungen a der Ausgleichsgeraden ermittle man gem. Gleichung 2.3 den jeweiligen E-Modul, also

$$E = \frac{gl^3}{4abh^3} \tag{5.2}$$

Schätzen Sie den relativen Größenfehler von E ab, indem Sie dei Fehler $\Delta l = 1mm$, $\Delta b = \Delta h = 0,1mm$ annehmen und aus der jeweiligen Auftragung z(m) den Fehler Δa bestimmen.

5.3 Schubmodulbestimmung aus Torsionsschwingungen

Man berechne aus den jeweils zwei Ergebnissen für T_0, T_1 und T_2 die Mittelwerte und bestimme entsprechend Gleichung 2.12 den Mittelwert des Schubmoduls G. Bei der Abschätzung des relativen Größtenfehlers von G ist ein Fehler $\Delta l = 1mm$ und $\Delta R = 0,005mm$ anzunehmen, die anderen Messfehler werden vernachlässigt.

Vergleichen Sie in der Abschlussdiskussion der Messungen Ihre Ergebnisse für E und G mit den Literaturdaten.

6 Fragen zur Selbstkontrolle

1. Was versteht man unter elastischem Verhalten eines Festkörpers?
2. Was bedeuten die Größen *Elastizitätsmodul*, *Schubmodul* und *Torsionsmodul*?
3. Sind die Module von der Temperatur abhängig? Wenn ja, warum?
4. Wie ist das Trägheitsmoment eines Festkörpers definiert?
5. Wie lautet die Schwingungsgleichung für ein Torsionspendel?
6. Beschreiben Sie ein typisches Spannungs-Dehnungsdiagramm eines Festkörpers. Was passiert, wenn man den elastischen Bereich verlässt?