Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 23. Dezember 2020 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Abgabe online über die MOODLE-Plattform ab. Laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* alle Namen und Matrikelnummern der Gruppenmitglieder. Reichen Sie pro Gruppe bitte nur eine Lösung ein.

Aufgabe 16 *Ein bisschen Syntax der Prädikatenlogik* (8 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenfolgen syntaktisch korrekte Formeln sind und falls ja, ob es sich um Aussagen handelt. Dabei sind x, y, z Variablen, a, b Konstanten, P, Q Prädikate und f, g Funktionssymbole. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihr Urteil. Antworten ohne Begründung erhalten *keine* Punkte!

1) $P(y) \to \forall x \forall z Q(x, z)$
2) $\forall x \exists y P(x, y) \land \forall x P(x, y, z)$
3) $\exists x\big(P(x) \to P(b)\big)$
4) $\forall x \forall y\big(Q(x, y) \to f(g(x), y)\big)$
5) $\forall a \exists x Q(a, x)$
6) $\exists x \exists y Q(P(x, y))$
7) $\exists x\big(P(x, a) \land \forall y P(x, y)\big)$
8) $\forall x P(x, \neg x)$

(4 p)

(b) Markieren Sie in folgenden Formeln, welche Variablen frei und welche gebunden sind. Zeichnen Sie Pfeile von gebundenen Vorkommen von Variablen zu deren "Bindungsstelle".

1) $\forall x P(x) \lor \forall y Q(x, y) \lor R(y)$
2) $\forall y P(x) \leftrightarrow (\exists y P(y) \to Q(x, y))$
3) $\forall x \forall y Q(x, y, z) \to \exists u \exists y R(x, y, y, u)$
4) $\exists x\ \big(P(g(x, y)) \land \forall x\ \exists y Q(x, f(y))\big)$ (4 p)

Aufgabe 17 *Syllogismen Reloaded* (6 Punkte)

Auf dem ersten Übungsblatt haben wir uns mit Syllogismen von Aristoteles beschäftigt. Gegeben seien die folgenden Syllogismen:

(a) Alle P sind M (1 p)

(b) Kein P ist M (1 p)

(c) Einige S sind M (1 p)

(d) Einige S sind nicht M (1 p)

(e) Kein P ist M, einige S sind M, dann gilt: einige S sind nicht P (2 p)

Formalisieren Sie diese Aussagen mit Hilfe der Prädikatenlogik. Verwenden Sie dazu die einstelligen Prädikatsymbole S, M und P.

Aufgabe 18 *Terme auswerten* (6 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Terme einer prädikatenlogischen Formel unter zwei verschiedenen Strukturen ausgewertet werden. Sei c eine Konstante, f eine einstellige Funktion und g eine zweistellige Funktion. Gegeben seien die folgenden drei Terme:

$$t_1 = f(g(f(y), c)), \quad t_2 = f(g(f(x), g(x, f(y)))), \quad \text{und} \quad t_3 = g(f(f(c)), g(f(y), x))$$

Werten Sie die drei Terme t_1, t_2 und t_3 unter den folgenden Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus. Geben Sie dabei ausreichend Zwischenschritte an. Antworten *ohne* Zwischenschritte erhalten *keine* Punkte.

(a) Die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ besteht aus dem Universum $U_\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}_0$ und der Interpretation $I_\mathcal{A}$ die folgendermaßen definiert ist:

- Die Interpretation $I_\mathcal{A}$ weist der Konstanten c die Zahl 0 zu, also $c^\mathcal{A} = 0$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{A}$ weist der einstelligen Funktion f die Nachfolgerfunktion zu, also $f^\mathcal{A} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, ist definiert als $f^\mathcal{A}(n) = n + 1$, für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{A}$ weist der zweistelligen Funktion g die Additionsfunktion zu, also $g^\mathcal{A} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist definiert als $g^\mathcal{A}(n, n') = n + n'$, für alle natürlichen Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}_0$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{A}$ weist den Variablen x, y die natürlichen Zahlen $2, 3$ zu, also $x^\mathcal{A} = 2$ und $y^\mathcal{A} = 3$.

Werten Sie $\mathcal{A}(t_1), \mathcal{A}(t_2)$ und $\mathcal{A}(t_3)$ aus. (3 p)

(b) Die Struktur $\mathcal{B} = (U_\mathcal{B}, I_\mathcal{B})$ besteht aus dem booleschen Universum $U_\mathcal{B} = \{0, 1\} = \mathbb{B}$ und der Interpretation $I_\mathcal{B}$ die folgendermaßen interpretiert wird:

- Die Interpretation $I_\mathcal{B}$ weist der Konstanten c den Wahrheitswert 0 zu, also $c^\mathcal{B} = 0$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{B}$ weist der einstelligen Funktion f die Negation zu, also $f^\mathcal{B} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ ist definiert als $f^\mathcal{B}(b) = \neg b$, für $b \in \{0, 1\}$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{B}$ weist der zweistelligen Funktion g die logische Disjunktion zu, also $g^\mathcal{B} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ ist definiert als $g^\mathcal{B}(b, b') = b \vee b'$, für alle $b, b' \in \mathbb{B}$.
- Die Interpretation $I_\mathcal{B}$ weist beiden Variablen x, y den Wahrheitswert 0 zu. also $x^\mathcal{B} = y^\mathcal{B} = 0$.

Werten Sie $\mathcal{B}(t_1), \mathcal{B}(t_2)$ und $\mathcal{B}(t_3)$ aus. (3 p)

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)