

Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 20. Januar 2021 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Abgabe online über die MOODLE-Plattform ab. Laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* alle Namen und Matrikelnummern der Gruppenmitglieder. Reichen Sie pro Gruppe bitte nur eine Lösung ein.

Aufgabe 24 *Super Tarski World*

(6 Punkte)

Eine *Tarski's World* ist ein 8×8 -Schachbrett, auf dem Tetraeder, Würfel (Cubes) und Dodekaeder, in den Größen klein (*small*), mittel (*medium*) und groß (*large*) platziert werden dürfen. Gegeben sind außerdem die folgenden Prädikate und ihre Bedeutungen:

- Ein Objekt a befindet sich *links* (*rechts*) von einem Objekt b , wenn sich seine Spalte links (rechts) von der Spalte von b befindet. Das dazugehörige Prädikat lautet dann $LeftOf(a, b)$ ($RightOf(a, b)$).
- Ein Objekt a befindet sich *vor* (*hinter*) einem Objekt b , wenn sich seine Zeile vor (hinter) der Zeile von b befindet. Das dazugehörige Prädikat lautet dann $FrontOf(a, b)$ ($BackOf(a, b)$). Kein Objekt befindet sich links von (rechts von, vor, hinter) sich selbst.
- $Between(a, b, c)$ bedeutet, dass sich a zwischen b und c befindet, wobei sich die Objekte a, b, c in derselben Zeile, Spalte oder Diagonale befinden müssen.
- Befinden sich zwei Objekte a, b in derselben Zeile (Spalte) so ist das Prädikat $SameRow(a, b)$ ($SameCol(a, b)$) wahr.
- Das Prädikat $Larger(a, b)$ bedeutet, dass das Objekt a größer ist als das Objekt b .

Geben Sie eine möglichst kleine *Tarski's World* an, die ein Modell für alle folgenden prädikatenlogischen Aussagen ist:

$$\forall x (Tet(x) \rightarrow \exists y (Dodec(y) \wedge Larger(y, x))) \quad (1)$$

$$\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge \neg Tet(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \exists z (Tet(z) \wedge Between(z, x, y))) \quad (2)$$

$$\neg \exists x (Tet(x) \wedge Small(x)) \wedge \exists x (Small(x) \wedge Cube(x)) \quad (3)$$

$$\forall x (Small(x) \rightarrow (\exists y (Cube(y) \wedge LeftOf(y, x)) \wedge \neg \exists z (Dodec(z) \wedge SameRow(x, z)))) \quad (4)$$

$$\forall x (Dodec(x) \rightarrow (\exists y (Cube(y) \wedge \neg Larger(y, x)) \wedge \exists z (Tet(z) \wedge SameCol(z, x)))) \quad (5)$$

$$\forall x (\neg \exists y LeftOf(y, x) \rightarrow (Medium(x) \wedge \neg Dodec(x))) \quad (6)$$

Hinweis: Die kleinste Lösung besitzt 6 Objekte.

(6p)

Aufgabe 25 Strukturen und Modelle

(6 Punkte)

Gegeben seien die prädikatenlogischen Formeln

$$F_1 = \exists x \exists y \left((R(x, x) \vee P(y)) \wedge P(f(y)) \right) \text{ und } F_2 = \forall x \exists y \left((P(x) \rightarrow R(y, f(x))) \wedge R(f(y), y) \right)$$

(a) Geben Sie eine Struktur \mathcal{A} an, so dass $\mathcal{A} \models F_1$ und $\mathcal{A} \not\models F_2$. (3 p)(b) Geben Sie eine Struktur \mathcal{B} an, so dass $\mathcal{B} \models F_2$ und $\mathcal{B} \not\models F_1$. (3 p)

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 26 (Nicht-)Äquivalenz von Formeln

(8 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten. Falls die Formeln äquivalent sind, geben Sie eine Kette von Äquivalenzumformungen (inklusive der benutzten Gesetze) an. Falls die Formeln nicht äquivalent sind, konstruieren Sie eine Struktur, die nur Modell für die eine Formel, aber nicht für die andere ist. Lösungen ohne eine Angabe der angewandten Gesetze erhalten Punktabzug.

(a) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ (2 p)(b) $\neg \forall x \forall y (\neg P(x, y) \wedge Q(x, y)) \equiv \exists x (\exists y P(x, y) \vee \neg \forall z Q(x, z))$ (3 p)(c) $\exists x \exists y (P(x, y) \vee Q(y, x)) \equiv \exists x \exists y P(y, x) \vee \exists x \exists y Q(x, y)$ (3 p)**Hinweis:** Nutzen Sie die gebundene Umbenennung um Variablen in Prädikaten zu vertauschen.(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)