

Logik

Die Hausaufgaben zu diesem Übungsblatt müssen bis spätestens Mittwoch, den 27. Januar 2021 um 12:00 Uhr abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Abgabe online über die MOODLE-Plattform ab. Laden Sie bitte ihre Lösungen in Form einer einzigen pdf-Datei hoch. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe *deutlich* alle Namen und Matrikelnummern der Gruppenmitglieder. Reichen Sie pro Gruppe bitte nur eine Lösung ein.

Aufgabe 27 *Normalformen* (9 Punkte)

Bringen Sie folgende prädikatenlogische Formeln in Klauselform und geben Sie dabei alle Zwischenschritte (bereinigte Form, Pränexform und Skolemform) an:

(a) $\forall x (R(a, x) \vee \exists x P(x))$ (3p)

(b) $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (P(y) \rightarrow \forall x (\forall x R(x) \rightarrow P(x))))$ (3p)

(c) $\forall x (\exists y (P(y) \wedge \forall z (R(x, y, z) \wedge Q(x, z))) \rightarrow \forall y (Q(x, y) \rightarrow \exists x Q(y, x)))$ (3p)

Aufgabe 28 *Modelle der Skolemform* (5 Punkte)

Wir betrachten die Formel

$$F = \forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x, y))).$$

(a) Überführen Sie F in eine erfüllbarkeitsäquivalente Skolemform. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte (bereinigte Form, Pränexform) an. (2p)

(b) Die in Aufgabe (a) entstandene Formel in Skolemform bezeichnen wir im folgenden mit F' . Die folgende Struktur \mathcal{A} ist ein Modell von F .

Die Struktur $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ ist wie folgt definiert:

- Universum $U_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}$
- $P^{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\} \subseteq U_{\mathcal{A}}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist ungerade}\} \subseteq U_{\mathcal{A}}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(z, z') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z + z' < 0\} \subseteq U_{\mathcal{A}} \times U_{\mathcal{A}}$

Erweitern Sie die Struktur so, dass sie auch ein Modell für F' ist. Bestimmen Sie dabei insbesondere eine Interpretation für das bei der Umwandlung in Skolemform neu hinzugekommene Funktionssymbol. Begründen Sie ihre Antwort. Antworten *ohne* Begründung erhalten Punkteabzug. (3p)

Aufgabe 29 Herbrand-Universen und -Expansionen

(6 Punkte)

Geben Sie für folgenden Formeln F_i ($i = 1, 2, 3$) jeweils das Herbrand-Universum $D(F_i)$ und die dazu passende Herbrand-Expansion $E(F_i)$ an.

(a) $F_1 = \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ (2p)

(b) $F_2 = \forall x (P(x) \wedge Q(x, f(x), a, b))$ (2p)

(c) $F_3 = \forall x (P(x, g(x)) \vee Q(x, h(x), f(k(x))))$ (2p)

(*Hinweis:* Geben Sie für unendliche Herbrand-Universen und -Expansionen mindestens so viele Elemente an, dass das Schema der Aufzählung ihrer Elemente deutlich wird.)

(Insgesamt werden für diese Übungsaufgaben **20** Punkte vergeben.)