Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. P. Henkemeyer

SoSe 2017

Übungen zur Riemannschen Geometrie 1

Blatt 2

Aufgabe 5. (Parameterwechsel bei Flächen) (12 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Fläche in $\mathbb{R}^n (k < n)$ und $U, V \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen. Weiterhin seien $X : U \to S$, $Y : V \to S$ zwei Parametrisierungen von S, sodass $X(U) \cap Y(V) =: W \neq \emptyset$.
Zeigen Sie: Dann ist der Kartenwechsel $h := X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ ein Diffeomorphismus, d. h. h ist differenzierbar und besitzt eine differenzierbare Umkehrabbildung h^{-1}.
(Somit ist jede k-dimensionale reguläre Fläche auch k-dimensionale Mannigfaltigkeit.)

Aufgabe 6. (Stereographische Projektion) (12 Punkte)

Sei $M = \mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die n-dimensionale Einheitssphäre mit ihrem Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1)$ und Südpol $S = (0, \ldots, 0, -1)$.

a) Leiten Sie die Formeln für die stereographischen Projektionen (gemäß Vorlesung) her:

$$f_1 : \mathcal{S}^n - N \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$
$$f_2 : \mathcal{S}^n - S \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

b) Berechnen Sie die Umkehrabbildungen $f_1^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^n - N$ und $f_2^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^n - S$

c) Zeigen Sie, dass der Kartenwechsel $h := f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.

(Die stereographische Projektion liefert somit eine differenzierbare Struktur der Sphäre $\mathcal{S}^n$, die aus nur zwei Parametrisierungen besteht.)

b. w.

Aufgabe 7. (12 Punkte)
Wir betrachten die reelle projektive Gerade $\mathbb{RP}^1$ und die Kreislinie $\mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.

a) Schreiben Sie für die beiden 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten differenzierbare Strukturen sowie die inversen Parametrisierungen explizit auf (ohne Beweis).

b) Zeigen Sie, dass beide Mannigfaltigkeiten diffeomorph zueinander sind.

Aufgabe 8. (12 Punkte)
Gegeben sei die C^∞-Kurve $\alpha : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) := \big(1 - t^2, t(1 - t^2)\big)$.

a) Ist α injektiv?

b) Ist α eine Immersion?

c) Ist α eine Einbettung?

Abgabe: Montag, 15.05.2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!